

Principes fondamentaux de l'instrumentation nucléaire

Ecole Joliot-Curie 2015

Jean-Marc Fontbonne

V1.3

1	Introduction.....	7
1.1	L'instrumentation nucléaire, c'est quoi ?	7
1.2	Un peu de philosophie instrumentale.....	8
1.3	Organisation du document.....	11
2	Interactions rayonnements/matière	12
2.1	Les électrons	12
2.2	Les photons.....	14
2.3	Les ions.....	16
2.4	Les neutrons.....	19
3	Eléments d'analyse de données.....	21
3.1	Rappels de statistique	21
3.1.1	Données, histogrammes, moyenne, variance et écart-type.....	21
3.1.2	Données liées, matrice de covariance.....	22
3.2	L'apport fondamental des techniques Bayésiennes	23
3.3	Combinaison des incertitudes	25
3.3.1	Un exemple, l'incertitude de mesure par temps de vol	26
3.3.2	Incertaince de mesure sur l'énergie déposée dans un spectromètre.....	27
3.4	Ajustements, optimisation et tutti quanti	28
4	Transport des charges secondaires	32
4.1	Un peu d'électrostatique.....	32
4.1.1	Le champ électrique dans un détecteur	32
4.1.2	Interlude électronique.....	33
4.2	Transport des charges	33
4.2.1	Dans le vide.....	33
4.2.2	Electrons et ions dans les milieux gazeux	34
4.2.2.1	Vitesse des charges.....	34
4.2.2.2	Diffusion.....	35
4.2.2.3	Amplification.....	36
4.2.3	Electrons et trous dans les milieux solides	37
4.3	Quelques exemples	37
4.3.1	Les chambres à dérive	37
4.3.2	Les détecteurs solides.....	40
5	Formation du signal.....	44
5.1	Le théorème de Ramo-Shokley	44
5.2	La recette de cuisine	45
5.3	Quelques exemples et conséquences du théorème de Ramo-Shockley	45
5.3.1	Une paire électron-trou dans un détecteur plan	45

5.3.2	Où la façon de traverser un détecteur présente quelque importance	47
5.3.3	Une ruse de sioux, la grille de Frisch	50
5.3.4	Un détecteur solide : le germanium en géométrie plane	52
5.3.5	Les détecteurs à pistes	54
6	Modélisation des détecteurs	57
6.1	Interlude électronique	57
6.1.1	Domaines temporel, de Fourier & de Laplace, sans complexes (ou presque)!.....	57
6.1.2	Méthode de calcul des circuits électroniques	59
6.1.2.1	Un petit exemple simple, mais fondamental.....	59
6.1.2.2	Impédances séries, parallèles & diviseur.....	60
6.1.2.3	La loi des nœuds exprimée en tension.....	61
6.2	Modélisation	62
6.2.1	La « capacité détecteur »	62
6.2.2	Polarisation des détecteurs	63
6.2.3	Extraction du signal.....	65
6.2.4	Le détecteur proprement habillé.....	66
6.2.5	Le câble, cet ami qui vous veut du bien... ..	66
6.2.5.1	Impédance du couple câble/charge vue par le générateur	67
6.2.5.2	Réflexions en extrémités de ligne, signaux rapides	67
6.2.5.3	Modèles simplifiés du couple câble/détecteur, signaux lents	70
6.2.5.4	Ce qu'il faut retenir	70
7	Introduction au traitement du signal.....	71
7.1	Du domaine temporel, de Fourier ou de Laplace, au domaine échantillonné.....	71
7.1.1	Echantillonnage & quantification.....	71
7.1.2	La transformation en z.....	72
7.1.2.1	Une approche simple et efficace.....	73
7.1.2.2	Une solution plus subtile, mais.....	74
7.2	Le filtrage	75
7.2.1	Signal	75
7.2.2	Bruit	76
7.2.2.1	La représentation du bruit et les calculs associés	76
7.2.2.2	Bruit des composants électroniques & détecteurs	77
7.2.2.3	Mesurer le bruit	78
7.2.3	Une première approche d'optimisation	79
7.3	De l'usage des préamplificateurs.....	83
7.3.1	Pourquoi la contre-réaction ?	83
7.3.2	Trois types de préamplificateurs très spécifiques.....	84

8	Traitement du signal.....	87
8.1	Signaux homothétiques en présence de bruit blanc	87
8.1.1	Quelques aspects qualitatifs	88
8.1.1.1	Signaux et filtrage.....	88
8.1.2	Mesure de charge	90
8.1.2.1	Le filtrage optimal	90
8.1.2.2	Comparaison à la pratique	92
8.1.2.3	Ce qu'il faut retenir	93
8.1.2.4	Note sur les techniques numériques	94
8.1.3	Mesures de temps	95
8.1.3.1	Le discriminateur à seuil, Leading Edge Discriminator	95
8.1.3.2	La discrimination à fraction constante, Constant Fraction Discriminator	96
8.1.3.3	Le filtre optimal, place à un peu d'exotisme	99
8.1.3.4	Ce qu'il faut retenir	100
8.2	Signaux homothétiques à support aléatoire en présence de bruit blanc	101
8.2.1	Quelques points de détail	102
8.2.1.1	Un mot sur le gain	102
8.2.1.2	Et un autre sur la ligne de base	102
8.2.2	Mesure de charge	104
8.2.2.1	Le filtre optimal	104
8.2.2.2	Un point sur le spectre de photoélectron unique du photodétecteur	106
8.2.3	Mesure de temps	108
8.3	Signaux homothétiques en présence de bruit coloré.....	109
8.3.1	Le triptyque détecteur, préamplificateur, amplificateur de spectroscopie.....	110
8.3.2	Signal et bruit derrière le préamplificateur de charges.....	111
8.3.2.1	Signal.....	111
8.3.2.2	Bruit.....	112
8.3.2.3	Synthèse, sortie de préamplificateur de charges	114
8.3.3	Traitement du signal dans l'amplificateur de spectroscopie.....	114
8.3.3.1	Filtrage optimal	114
8.3.3.2	Méthodologie d'étude des filtres	117
8.3.3.3	Gestion du déficit balistique	120
8.3.3.4	Empilement	121
8.3.3.5	Les filtres usuels en spectroscopie.....	123
8.3.4	Les réglages de l'amplificateur de spectroscopie, en pratique	124
8.3.4.1	Correction de pôle-zéro	124
8.3.4.2	Correction de ligne de base	125

8.3.4.3	Réglage du temps de mise en forme optimal d'un amplificateur de spectroscopie	126
9	Fourre-tout instrumental.....	127
9.1	Un peu de spectroscopie appliquée.....	127
9.1.1	Spectroscopie comparée.....	127
9.1.2	Spectroscopie de haute résolution au moyen de HPGe	128
9.2	Discrimination n/γ	129
9.2.1	Position du problème.....	129
9.2.2	Optimisation de la porte d'analyse	130
9.2.3	Et avec une seule porte d'intégration ?.....	133

1 Introduction

1.1 L'instrumentation nucléaire, c'est quoi ?

L'instrumentation en physique nucléaire souffre d'un déficit d'estime par rapport à sa grande sœur, l'instrumentation en physique des hautes énergies. La faute essentiellement au gigantisme des installations (qui fait rêver, en première approximation) et probablement au prestige qui y est associé. On ne saurait faire plus fausse route qu'en pensant que « hors les hautes énergies, point de salut ». Quand on y regarde de plus près, les problèmes d'instrumentation de physique des hautes énergies n'ont pas nécessairement grand-chose à voir avec ceux de la physique nucléaire, et si les détecteurs ou électroniques semblent les mêmes, une analyse un peu attentive vous démontrera facilement le contraire.

La physique des hautes énergies a besoin de détecteurs fortement segmentés (pour mesurer précisément les trajectoires, ce qui reste le principal moyen d'identification des particules, et pour suivre les centaines de particules, voire plus, à chaque collision). La dynamique, en termes de perte d'énergie est relativement faible (quelques dizaines de MIPs¹). Les particules ont des longueurs d'atténuation importantes (quelques mètres à quelques dizaines de mètres). Les expériences durent plusieurs années car il est impossible d'accéder aux détecteurs (pour les remplacer ou les réparer, par ex.). Ces contraintes imposent des équipes extrêmement conséquentes de physiciens, d'ingénieurs et de techniciens, et les budgets qui vont avec...

En physique nucléaire, le contraste ne pourrait être plus flagrant. Les particules qu'il faut mesurer n'ont que quelques micromètres à quelques dizaines de centimètres de parcours dans les détecteurs. Il est donc relativement délicat de mesurer leur trajectoire, d'autant qu'on dispose rarement des champs magnétiques qui seraient utiles à cet exercice. Leur dynamique en énergie, et donc en pertes d'énergie dans les détecteurs, sont extrêmement importantes (typ. deux à quatre ordres de grandeur). Leur nombre est « limité » à chaque collision. Les équipes sont beaucoup plus réduites, de même que les budgets associés. Les expériences sont courtes (quelques semaines à quelques mois) et doivent être versatiles et modulables².

De fait, les méthodes développées pour tenir compte de ces contraintes sont parmi les plus belles qu'on puisse trouver. Elles laissent une place importante pour l'expérimentation d'idées nouvelles et poussent les détecteurs, les électroniques et les méthodes d'analyse dans leurs retranchements. La versatilité et la modularité sont d'excellents moyens, pour les jeunes physiciens, de manipuler ou développer avec enthousiasme les détecteurs qui serviront à leur physique.

La tentation est souvent grande d'aborder l'instrumentation sous la forme de l'empilement de « boîtes noires » ou détecteurs dont on est, en toute bonne foi, certain qu'ils sont d'excellente qualité. Qu'en est-il lorsqu'on les met ensemble ? C'est une question majeure liée aux interfaces entre les dispositifs aussi bien qu'aux dispositifs eux-mêmes. L'instrumentation est un tout et il convient, pour obtenir un résultat convenable de s'assurer que l'ensemble fonctionne bien (pas chaque partie individuellement) et est optimisé pour l'objectif à atteindre.

Par conséquent, l'objet de ce cours d'instrumentation nucléaire n'est pas de fournir des recettes de cuisine garantissant un résultat. On va se contenter ici d'explicitier quelques points concrets d'instrumentation,

¹ MIP= Minimum ionizing particle, particule au minimum d'ionisation, on ne peut pas déposer moins d'énergie qu'un MIP dans un détecteur. En hautes énergies, presque toutes les particules qu'il faut détecter sont à un ou à quelques MIPs.

² Les physiciens nucléaires ont toujours une excellente idée de dernière minute qui change le setup expérimental !

dont on sait aujourd'hui qu'ils sont incontournables, et les agrémenter d'exemples que j'espère utiles. Je vais, de fait, prendre beaucoup de libertés et raccourcis qui pourraient froisser les experts de tel ou tel domaine, mais l'important n'est pas forcément le résultat, mais plus souvent, le chemin. C'est ce chemin que nous allons découvrir et explorer. La démarche est la suivante :

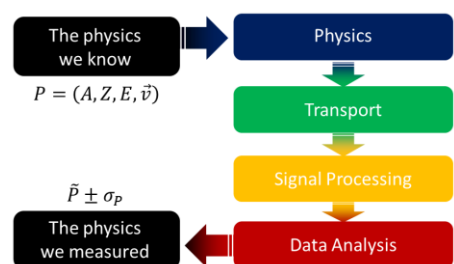
- On prédit tout ce qu'il est raisonnablement possible de prédire
- Après, on réalise l'expérience ou l'essai qui ne peut conduire essentiellement qu'à deux possibilités :
 - 1) Le résultat est plus ou moins conforme à nos prédictions, et l'expérience est plus ou moins sous contrôle. On a déjà la conscience d'avoir bien fait son travail !
 - 2) Le résultat n'est pas conforme et il n'y a guère que trois raisons possibles (par ordre de probabilités) :
 - a) On s'est trompé dans les calculs. Au moins, on a appris quelque-chose !
 - b) On ne comprend pas le fonctionnement du détecteur et on a un vrai problème...
 - c) On est face à une découverte... Ce sont des choses qui arrivent, même aux gens les plus compétents...

1.2 Un peu de philosophie instrumentale

En premier lieu, l'instrumentation, c'est mesurer une grandeur physique et être capable d'associer une incertitude à cette mesure.

En physique nucléaire, on dispose en entrée d'une particule P . Celle-ci est principalement caractérisée par sa masse A , sa charge Z , son énergie cinétique E et sa vitesse \vec{v} : $P = (A, Z, E, \vec{v})$. Par conséquent, un système d'instrumentation doit remplir un contrat simple : à la suite de l'interaction de cette particule, il doit fournir un estimateur de ces paramètres et leurs incertitudes associées : $\vec{P} \pm \sigma_P$.

Pour le réaliser et concevoir une chaîne d'instrumentation efficace, on peut décomposer ce contrat en connaissances élémentaires garantissant le résultat final. La démarche employée dans ce document est illustrée sur la figure suivante. On part d'une particule $P = (A, Z, E, \vec{v})$, dont on va décrire l'interaction dans un détecteur lors de la *phase physique*. A partir de cette étape, les particules secondaires produites lors de cette interaction sont suivies individuellement lors d'une *phase de transport* qui nous permet de décrire précisément les caractéristiques du signal qui est produit au sein du détecteur. Cette phase de transport explicitée, nous devons mettre en œuvre une *phase de traitement du signal* qui permet d'extraire au mieux les informations nécessaires à la *phase d'analyse de données*. Cette dernière va éventuellement combiner les informations provenant de divers détecteurs pour nous fournir, in fine, l'estimateur de la particule incidente $\vec{P} \pm \sigma_P$.

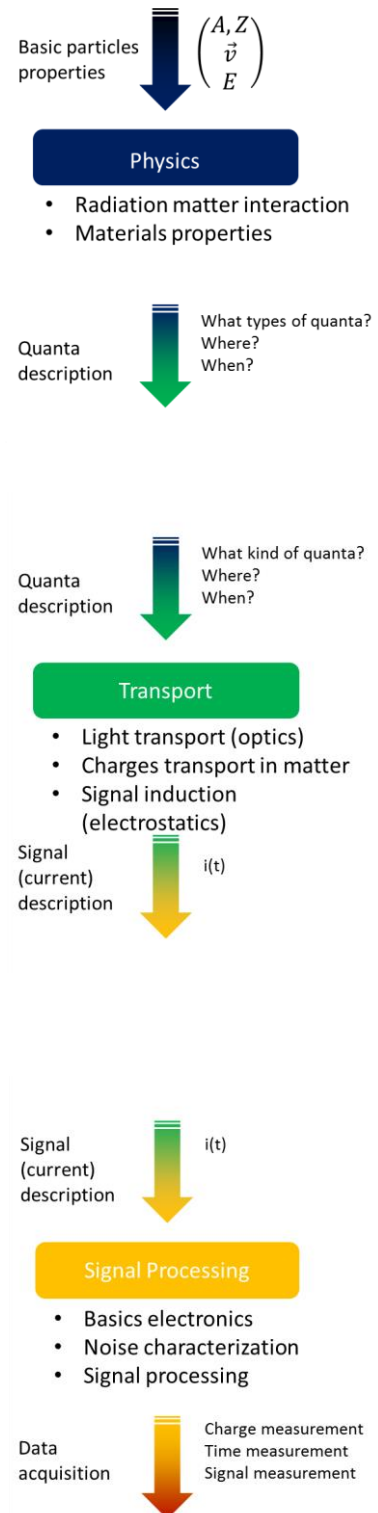


Entrons à présent dans le détail de ces différentes phases afin d'élaborer les sous-contrats qu'elles devront remplir.

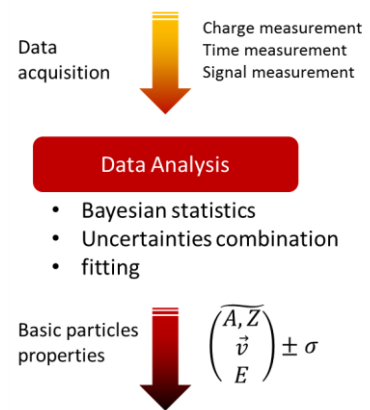
La première étape du chemin est la *phase physique*. Elle consiste, à partir des propriétés basiques des particules incidentes, à déterminer **les quanta qui seront produits dans notre détecteur**. Plus précisément, il va falloir répondre à trois questions : quels types de quanta sont produits (des charges, de la lumière, etc.), mais également où et quand ces quanta sont produits. Nous avons besoin de connaître les propriétés de base des matériaux détecteurs, mais également les processus d'interaction rayonnement-matière qui sont à l'œuvre dans ces matériaux.

A partir de là, nous devront transporter ces quanta dans le volume du détecteur, en utilisant les lois de l'optique pour la lumière ou de l'électrostatique pour les particules chargées, par exemple. C'est la *phase de transport*. Elle va conduire à une **description électrique du signal issu du détecteur**, plus précisément, du générateur de courant équivalent à notre équipement. Nous verrons que, si la description de notre détecteur est raisonnablement complète, nous pourrions décrire très précisément la forme et l'amplitude du signal qu'on devrait observer. Si nous maîtrisons un tant soit peu notre sujet, l'expérience ne devrait être qu'une confirmation des quelques calculs nécessaires à cette étape. Dans le cas contraire, où bien nous ne comprenons pas la physique au cœur de notre équipement, où bien il ne fonctionne pas correctement. Observer le signal et le confronter à ses prédictions est donc une étape cruciale du développement de détecteurs qui est malheureusement trop souvent laissée de côté.

On sait maintenant exprimer le signal issu du détecteur. Malheureusement, chaque composant électronique utilisé pour le mesurer, de la simple résistance de polarisation au préamplificateur, en passant par le détecteur lui-même, ajoute du bruit à ce signal. Il va donc falloir trouver des méthodes de traitement du signal qui vont nous permettre d'acquérir les informations désirées dans les meilleures conditions possibles. C'est la *phase de traitement du signal* qui va nous permettre de **mesurer des charges ou des instants de détection**. C'est à partir de ces quelques informations qu'il faudra remonter à l'identité de la particule incidente.

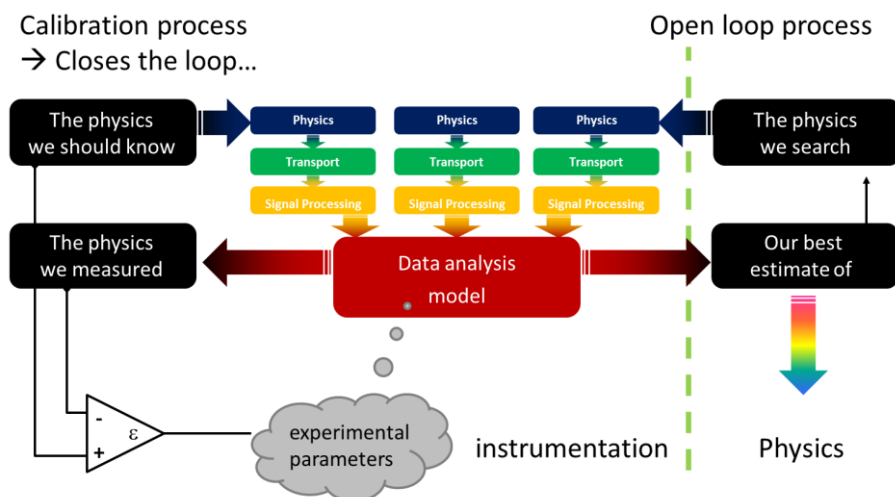


C'est précisément le rôle de la *phase d'analyse de données*. Elle va **combiner les informations disponibles** pour finalement tenter de **retrouver les paramètres de base de la particule incidente**. Nous sommes donc revenus à notre point de départ et, si nous avons bien travaillé, l'estimation dont nous disposons est juste (sans biais) et précise (avec une incertitude faible). On peut alors commencer à mesurer de la physique avec la chaîne d'instrumentation qui vient d'être conçue...



En fait, pas tout à fait ! Il y a une étape dont nous n'avons pas encore parlé : la *phase de calibration*. Le schéma complet d'une chaîne d'instrumentation devrait donc ressembler à la figure suivante :

Instrumentation & physics : the complete process



La séquence d'analyse de données nécessite la connaissance de nombreux paramètres comme la sensibilité, les pieds, des corrections de linéarité, etc. Cette connaissance est établie par comparaison entre des processus de physique connus, observés à travers le prisme de notre instrument et reconstruits à travers lui. Les écarts entre la stimulation et la mesure sont utilisés pour ajuster les paramètres expérimentaux des modèles. Tel quel, **le système est bouclé**. Nous verrons plus loin que ce bouclage, bien maîtrisé, est le seul moyen d'obtenir un système stable minimisant les erreurs. On peut dès lors le stimuler par les processus physiques qui nous intéressent et dont nous cherchons à affiner la connaissance. Le système d'instrumentation, correctement calibré, nous fournit alors la meilleure estimation possible de cette physique. On notera que, dans cette utilisation, le système est en boucle ouverte. Rien ne garanti que les résultats qu'il fournit sont fidèles à la réalité. Il faut donc toujours veiller à ce que le type de stimulation de cette « nouvelle » physique ne soit pas trop éloigné de la physique qui a servi à la calibration.

1.3 Organisation du document

Ce document est principalement destiné aux doctorants en physique nucléaire expérimentale. Il a été conçu comme un « guide de survie en milieu hostile ». Une expérience de physique nucléaire est un milieu hostile : tout va très vite, il ne faut pas « se louper », sinon on n'aura pas de données à dépouiller, le faisceau n'est jamais comme on voudrait qu'il soit, les détecteurs fonctionnent toujours de travers, sans parler de l'électronique ou de l'acquisition ! En réalité, en général, tout va bien, mais il faut avoir les nerfs solides pour s'en convaincre.

Pour mettre toutes les chances de son côté, rien de mieux qu'une connaissance approfondie de l'instrumentation. Le problème est que l'instrumentation est principalement une science de l'ingénieur, donc, par essence très pratique. Elle utilise des moyens concrets pour (tenter de) parvenir à des objectifs quantifiables à travers une démarche scientifique (plus ou moins) bien définie. Pour parvenir à cet exercice de style, elle utilise des concepts efficaces qui ne sont pas toujours enseignés dans le milieu de la physique théorique. Je vais donc tenter ici de démystifier ces concepts et de les rendre accessibles. L'idée de base étant d'appeler la curiosité du lecteur qui trouvera sans aucun doute des documents plus complets sur chaque sujet, tout en essayant de lui donner une vision d'ensemble, si possible structurée, suivant grosso-modo le chemin décrit plus haut.

Dans cet objectif, le cours débute par un rapide rappel sur les interactions rayonnements/matière (chapitre 2) permettant de définir le contexte ; qu'est-ce qu'on cherche à mesurer ? Il sera suivi de quelques éléments d'analyse de données. En toute logique, le chapitre 3 aurait dû être à la toute fin du chemin, ceci étant, son contenu est au cœur de la démarche proposée et les notions abordées sont indispensables à la compréhension des notions proposées plus loin. Dans la continuité du chemin proposé, les particules incidentes ont ionisé le volume sensible du détecteur. Il convient donc de savoir transporter les quanta produits. C'est l'objet du chapitre 4. A partir de là, on va savoir décrire très précisément le signal issu de nos détecteur en utilisant un outil absolument remarquable, le théorème de Ramo-Shockley, qui va occuper le chapitre 5. Un retour dans le « cambouis » va nous permettre de développer une modélisation efficace des détecteurs dans toute leur élégante complexité, dans le chapitre 6. Nous saurons alors comment « construire » un détecteur. Il ne nous restera qu'à exploiter proprement son signal. Pour ce faire, il nous faudra passer un peu de temps dans le chapitre 6 qui permettra une rapide remise à niveau sur le filtrage du signal et du bruit et qui permettra d'introduire les concepts fondamentaux à la base du traitement du signal. Le chapitre 6 sera une tentative d'unifier les méthodes nucléaires de traitement du signal en les classant par types de signaux et natures de bruits, en vue de mesurer les paramètres des particules incidentes, ce qui termine de boucler le cours. Enfin, le chapitre 9 est laconiquement intitulé « Fourre-tout instrumental ». Il contient des trucs/astuces/réflexions diverses sur des sujets variés (d'où son titre). Il est destiné à croître au cours du temps et des versions de ce document.

En vous souhaitant une bonne lecture...

Un grand merci à mes relecteurs/correcteurs/inspireurs Cathy Fontbonne et Jean Colin.

2 Interactions rayonnements/matière

Il n'est pas question ici de se substituer à un cours complet d'interactions rayonnements/matière et de décrire en détails les subtilités des phénomènes mis en jeu. Nous allons simplement voir quelques règles de « survie » utiles en instrumentation nucléaire. Elles permettent de dégager rapidement et efficacement les grandes lignes du fonctionnement d'un détecteur soumis à des rayonnements incidents. Pour plus de détail, il faudrait nécessairement utiliser des codes Monte-Carlo, mais rien ne vaut une petite expression analytique utilisable facilement pour s'amuser et comprendre !

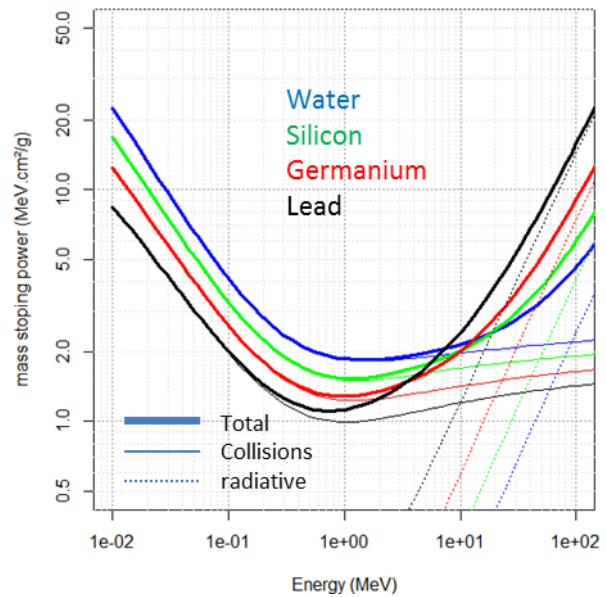
Par ailleurs, nous allons surtout porter notre attention sur un aspect fondamental de l'instrumentation nucléaire parfois sous-estimé : la dynamique en énergie déposée. Le physicien est focalisé sur la section efficace des processus qu'il étudie car elle gouverne les capacités de réjection d'événements dont devront faire preuve ses techniques d'analyse. Du point de vue du détecteur et de son électronique, cet aspect est parfaitement transparent. Par contre, la chaîne d'instrumentation va généralement être très sensible aux variations de taux de comptage et surtout aux excursions importantes en gamme dynamique. Un exemple simple permet d'illustrer le phénomène : regardons ce qu'il advient d'un détecteur plastique soumis à un spectre plat de neutrons de 10MeV à 100MeV. Pour le moment, la dynamique *physique* n'est que de 10. Dans cette gamme, la physique du neutron est « relativement » simple. En première approximation, il va faire du billard sur les noyaux d'hydrogène du scintillateur plastique (on néglige les carbones). Dans ce jeu, le neutron frappe un proton avec un paramètre d'impact aléatoire et c'est le recul du proton qu'on mesure. Après l'interaction, les directions de proton de recul et du neutron forment un angle de 90° . L'énergie transférée est aléatoire et le spectre du proton de recul est plat. Il s'étend de 0MeV (quand il est frôlé en périphérie) à l'énergie du neutron (quand il fait un carreau). Si on place un seuil de détection à $500\text{keV}_{\text{neutron}}$ par exemple, la dynamique vient de passer de 10 à 200 et le spectre en énergie déposée n'a plus rien à voir avec le spectre en énergie des neutrons incidents...

Au-delà de cet exemple trivial, il n'est pas rare, en instrumentation nucléaire, de devoir traiter des dynamiques de plusieurs milliers, voire dizaines de milliers. Ces chiffres peuvent paraître extrêmes, mais un second exemple va permettre de comprendre leur origine. Prenons l'exemple de la production d'ions super-lourds par fusion. On veut identifier ces ions pour authentifier leur découverte en mesurant par exemple l'énergie de l' α de décroissance. Lors de leur implantation, ils déposent plusieurs GeV ou dizaines de GeV dans le détecteur. La décroissance α a lieu quelques microsecondes après (en fonction de leur durée de vie). Les α déposent quelques MeV qu'il faut mesurer avec la meilleure résolution possible, disons 50keV. On doit donc tenir une dynamique *électronique* supérieure à 20000 si on veut pouvoir faire le travail correctement. Par ailleurs, si le système de filtrage est bien conçu, le détecteur ne voit généralement rien (les sections efficaces de production sont très faibles), puis subitement, il va recevoir 1GeV, puis, potentiellement, quelques microsecondes après, quelques MeV. La situation est loin d'être idéale pour quelque électronique que ce soit !

2.1 Les électrons

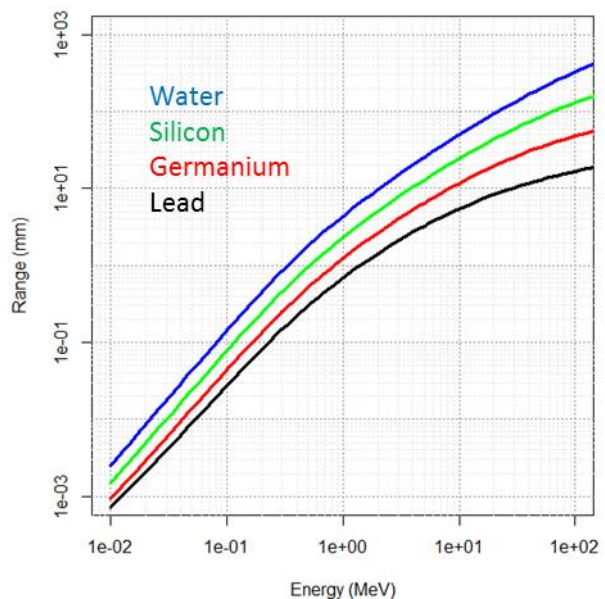
Les électrons sont des particules chargées. En traversant la matière, ils perdent continuellement leur énergie en ionisant ou excitant le milieu environnant. La perte d'énergie par unité de distance est appelée le pouvoir d'arrêt linéique (sous-entendu, du matériau environnant sur l'électron incident) et est notée S (pour Stopping power).

Le pouvoir d'arrêt linéique est décrit par la formule de Bethe-Bloch dont les paramètres libres (dépendant du matériau et de sa phase, solide ou gazeuze), sont ajustés sur les données expérimentales. La figure ci-contre, illustre le pouvoir d'arrêt massique (pouvoir d'arrêt linéique divisé par la densité du matériau) pour quatre matériaux types, l'eau, le silicium, le germanium et le plomb. On y distingue deux pouvoirs d'arrêt différents. Le pouvoir d'arrêt par collisions, prépondérant en dessous de 10MeV et qui est responsables de l'ionisation ou de l'excitation du matériau. Le pouvoir d'arrêt radiatif, prépondérant principalement à haute énergie et dans les matériaux de Z élevé. Il est responsable de l'émission de rayons X lors du freinage des électrons et est exploité en tant que tel dans les tubes radiogènes.



Dans une grande gamme d'énergie, disons de 100keV à 10MeV, les pouvoirs d'arrêt massique des matériaux sont compris entre 1 et 3 MeV.cm².g⁻¹ et sont « quasiment » indépendants de l'énergie. La densité linéique d'ionisation est quasiment constante le long de la trajectoire de l'électron incident.

A partir de ces courbes, on peut tracer la longueur de la trajectoire des électrons incidents en fonction de leur énergie, comme cela est illustré sur la figure ci-contre pour nos matériaux d'intérêt. On y apprend par exemple qu'il faut au minimum 50mm d'eau pour stopper des électrons de 10MeV et guère plus de 6mm de plomb.



Ces courbes sont également valables pour les positrons. En Tomographie par Emission de Positron (TEP), on place un atome de fluor 18 sur une molécule de Fluorodésoxyglucose (¹⁸F-FDG) qui peut se fixer sur les organes consommant du sucre en quantité. Le fluor 18 est radioactif β⁺ et a une durée de demi-vie d'approximativement 110 minutes. Lorsqu'il se désintègre, il émet donc un positron d'énergie 634keV. Celui-ci va se thermaliser en parcourant un peu plus de 2mm puis s'annihiler en rencontrant un électron. L'annihilation conduit à l'émission de deux γ des 511keV dans des directions opposées. En les détectant simultanément, on dispose donc d'une ligne sur laquelle se situait l'atome de ¹⁸F. En réitérant la mesure sur l'ensemble des désintégrations, le croisement de ces lignes indique l'endroit où s'est fixé préférentiellement le ¹⁸F-FDG. La limite de résolution de la TEP est donc intrinsèquement fixée par la longueur de trajectoire des positrons émis, ici, typiquement, 2mm.

Muni de ces courbes, on peut commencer à estimer la production de quanta utiles à la détection (que ce soient des paires électrons/ions dans les détecteurs gazeux, des paires électrons-trous dans les détecteurs solides, ou des photons dans les scintillateurs. En moyenne le long de sa trajectoire, l'électron incident va produire une densité linéique d'ionisations égale à :

$$\frac{dN}{dx} = \frac{S_{coll}}{\omega}$$

Où ω est l'énergie nécessaire pour créer l'un quelconque des quanta exprimés ci-dessus. Ce facteur s'exprime en eV. Il constitue une caractéristique fondamentale du matériau dont quelques valeurs sont tabulées ci-dessous :

Some gases (electron/ion pairs)

N2	CO2	Ar	CH4
35eV	31eV	33eV	26eV

Solid state detectors (electron/hole pairs)

Si	Ge	C (diamond)	CdTe
3,6eV	3eV	13eV	4,3eV

Some scintillators (photons)

organic	NaI(Tl)	CsI(Tl)	LaBr
Typ. 100eV	25eV	19eV	16eV

Plus l'énergie nécessaire pour produire un quantum est faible, plus le nombre de quanta produits est élevé et meilleure est la résolution en énergie. Dès lors, on ne s'étonnera pas que les détecteurs solides constituent des spectromètres mieux résolus que les scintillateurs (à masse totale constante).

2.2 Les photons

Les photons interagissent dans la matière principalement suivant cinq mécanismes différents dont l'importance relative dépend de l'énergie :

- L'effet photoélectrique. Le photon est absorbé et transfère toute son énergie à un électron du cortège électronique d'un atome. Celui-ci recule avec l'énergie transmise minorée de son énergie de liaison. L'atome va ensuite réorganiser son cortège pour retourner à l'équilibre en émettant des électrons Auger et des photons d'énergie caractéristique. C'est le phénomène prépondérant à basse énergie. Compte tenu des faibles longueurs de trajectoire des électrons émis, on peut, au moins en, première approximation, considérer que le photon incident a déposé toute son énergie dans une interaction très localisée.
- La diffusion cohérente, diffusion Rayleigh. Le photon incident interagit avec l'atome dans son intégralité puis il est diffusé sans modification de son énergie. C'est un phénomène marginal dont la probabilité est de l'ordre d'un facteur dix plus faible que l'effet photoélectrique.
- La diffusion incohérente, diffusion Compton. Le photon interagit avec un électron auquel il transfère une partie de son énergie, lui-même étant diffusé avec l'énergie résiduelle. Si le photon, d'énergie $h\nu$ part avec un angle θ après la collision, alors l'énergie transférée à l'électron (que l'on pourra mesurer) vaut :

$$T_{\beta} = h\nu \cdot \frac{\alpha \cdot (1 - \cos(\theta))}{1 + \alpha \cdot (1 - \cos(\theta))} \text{ avec } \alpha = \frac{h\nu}{511\text{keV}}$$

Dès lors, on est certain de ne mesurer qu'une partie de l'énergie transportée par le photon incident, celle-ci s'étendant de 0 à $T_{\beta max} = h\nu \cdot \frac{2 \cdot h\nu}{511\text{keV} + 2 \cdot h\nu}$. Par exemple, pour des photons de ^{241}Am ($h\nu=59$ keV) on trouve 11keV. A plus haute énergie, pour des photons de ^{137}Cs ($h\nu=662\text{keV}$), on a 477keV. Notons que, pour les détecteurs de grande dimension, les interactions multiples des photons diffusés peuvent produire un pic à l'énergie totale du photon incident. Il ne s'agit pas, pour ce pic, d'effet photoélectrique à proprement parler, mais bien de la somme d'interactions au sein du détecteur.

La diffusion Compton est l'effet prépondérant sur une large gamme d'énergies intermédiaires allant de quelques dizaines de keV à plusieurs MeV, suivant les matériaux.

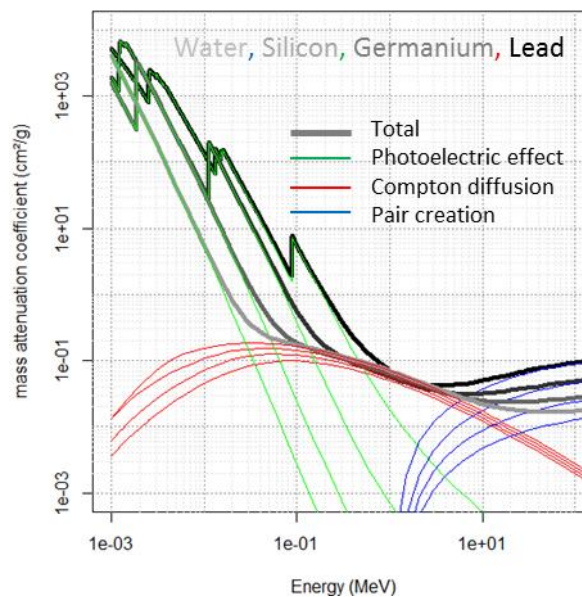
- La matérialisation ou création de paires. Elle a lieu lorsqu'un photon de haute énergie passe à proximité du champ rayonné par le noyau d'un atome ou de ses électrons (moins probable). L'énergie du photon incident est convertie dans l'énergie de masse d'un électron et d'un positron ($2 \times 511 \text{keV} \cdot c^{-2}$). Le reste est transféré sous forme d'énergie cinétique partagée par les deux particules chargées créées. C'est donc un effet à seuil qui ne peut avoir lieu que pour des photons d'énergie supérieure à 1022keV. Dans la suite de l'histoire, l'électron dépose généralement l'intégralité de son énergie cinétique dans le détecteur. Le positron, quant à lui, se thermalise puis s'annihile en rencontrant un électron du milieu, produisant alors deux photons de 511keV qui peuvent, ou non, interagir à leur tour dans le détecteur. Suivant le scénario exact, on trouvera donc un pic à l'énergie totale, un autre à l'énergie totale diminuée de 511keV et un troisième à l'énergie totale diminuée de 1022keV.

L'interaction des photons est donc un phénomène stochastique. Le nombre dN de photons interagissant sur une épaisseur de matière dx s'écrit :

$$dN = N \cdot \mu \cdot dx$$

Où N est le nombre de photons incidents et μ le coefficient d'atténuation linéique total (en cm^{-1}), c'est-à-dire, la somme des coefficients d'atténuation linéique de tous les phénomènes évoqués plus haut.

Les principaux effets sont illustrés sur la figure suivante pour nos matériaux d'intérêt où est représenté le coefficient d'atténuation massique (le coefficient d'atténuation linéique divisé par la densité du matériau) :

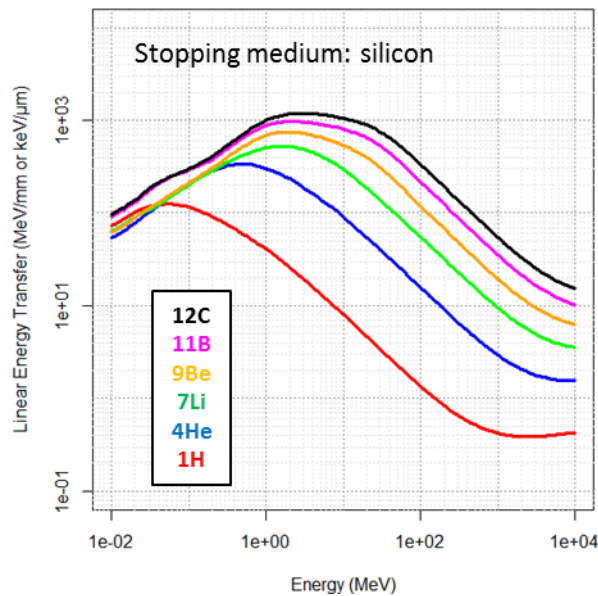


On y distingue clairement l'effet photoélectrique et ses résonances lorsque le photon incident a assez d'énergie pour arracher des électrons de plus en plus liés. La diffusion Compton qui est approximativement indépendante du matériau, et la création de paires, au-delà de 1 MeV.

Pour détecter des photons, on a bien entendu intérêt à utiliser des matériaux de Z élevé et denses pour favoriser, d'une part l'effet photoélectrique et d'autre part les interactions multiples.

2.3 Les ions

Le ralentissement des ions obéit également à la formule de Bethe-Bloch. Ceci étant, compte tenu de la multitude de types d'ions rencontrés en physique nucléaire, l'image est nécessairement plus floue. Les graphes ci-dessous exposent le pouvoir d'arrêt linéique (ou LET pour Linear Energy Transfer) d'ions légers (des protons aux ions carbonés) dans l'eau :



Sur la majorité de la gamme en énergie, le comportement du pouvoir d'arrêt linéique suit très exactement la formulation de Bethe-Bloch. Quand l'énergie de l'ion diminue, celui-ci tend à capturer des électrons du milieu qu'il traverse et sa charge effective diminue progressivement conduisant à une diminution progressive du pouvoir d'arrêt.

Représenté comme cela, il est difficile de dégager des grandes règles. Un exercice amusant peut consister à traiter le problème à la façon de la mécanique classique en affirmant que la force qui agit sur les ions pour les freiner n'est pas bien connue mais est liée à l'électrostatique et que c'est une force de freinage (liée à la vitesse). On peut donc écrire, de façon tout à fait naïve les équations fondamentales de la mécanique :

$$A \cdot a = -k \cdot Z^2 \cdot v^\beta$$

Où A et Z sont respectivement la masse et la charge de l'ion incident, a et v son accélération et sa vitesse, β , un paramètre caractéristique de la force de frottement et k , un coefficient lié au matériau. On peut alors intégrer l'équation différentielle le long du trajet de la particule et effectuer un changement de variables pour l'exprimer en fonction de l'énergie de l'ion ou de son parcours résiduel (la distance qu'il pourrait encore parcourir, compte tenu de son énergie). Cette approche très simple a été développée par les protonistes dans les années 70 pour établir la planification de traitement de patients traités en protonthérapie. Elle s'étend naturellement à tous les ions de Z raisonnables (pour limiter l'impact de la capture électronique) et permet de dégager les grandes lignes de la formule de Bethe-Bloch de façon très élégante. Si on ajuste les résultats obtenus sur les protons, par exemple, on apprend que la puissance β de la force de freinage est très proche de -1,5.

Les relations ci-dessous découlent toutes seules de cet exercice amusant (appliqué ici au silicium) :

On peut en premier lieu exprimer le parcours (en mm) en fonction de l'énergie (en MeV) et inversement :

$$R = 0,013 \cdot \frac{A}{Z^2} \cdot \left(\frac{E_0}{A}\right)^{1,75}$$

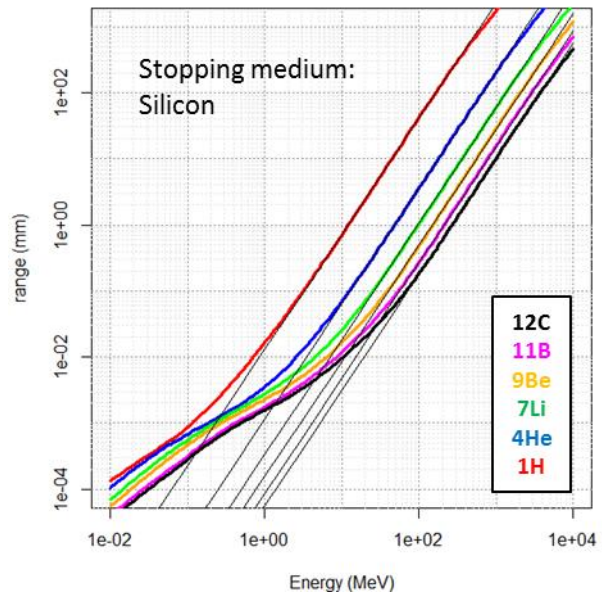
$$E_0 = 11,96 \cdot A \cdot \left(R \cdot \frac{Z^2}{A}\right)^{0,57143}$$

La validité de l'ajustement peut être examinée sur la figure ci-contre (le modèle est en traits pleins noirs). Il est tout à fait pertinent pour des parcours résiduels supérieurs à quelques centaines de micromètres. En dessous, il faudrait apporter des corrections...

On peut également exprimer le transfert d'énergie linéique (en MeV.mm⁻¹ ou keV.μm) au moyen des deux précédents paramètres :

$$LET = 6,8343 \cdot Z^2 \cdot \left(R \cdot \frac{Z^2}{A}\right)^{-0,42857}$$

$$LET = 44,0 \cdot Z^2 \cdot \left(\frac{E}{A}\right)^{-0,75}$$



Ce « modèle » nous apprend par exemple que des protons et des α ayant la même vitesse (même E/A), vont avoir exactement le même parcours et qu'à vitesse donnée, le pouvoir d'arrêt est uniquement gouverné par le Z^2 de l'ion incident.

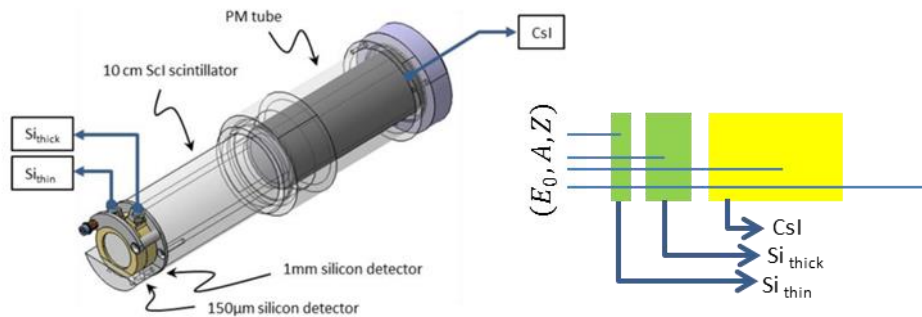
L'expression du LET est surtout utile pour les détecteurs gazeux. Pour les détecteurs solides, les équations données ci-dessus peuvent être utilisées pour mesurer l'énergie totale déposée par un ion incident. Ainsi, un ion incident caractérisé par (E_0, A, Z) a un parcours R dans matériau du détecteur d'épaisseur Th donnée. L'énergie qu'il y dépose est simplement :

$$\Delta E = E_0 - E(R(E_0) - Th)$$

Si $R(E_0) - Th > 0$, sinon, c'est simplement E_0 .

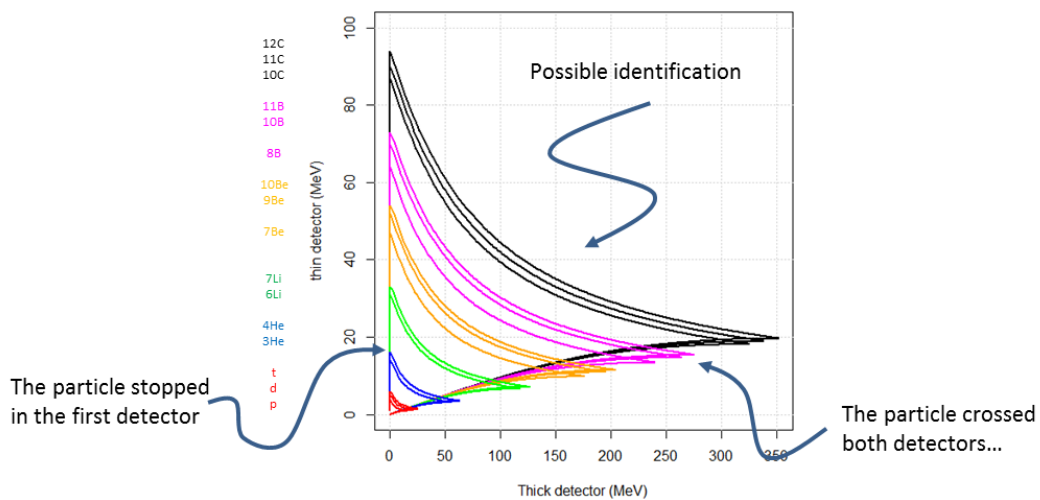
La physique nucléaire exploite ce phénomène en développant des équipements baptisés télescopes. Les télescopes sont des empilements d'au moins deux détecteurs d'épaisseurs croissantes dont les premiers étages sont traversés par les ions incidents. On mesure simultanément les énergies déposées dans les étages touchés et nous allons voir que cela permet d'identifier les particules incidentes, à savoir déterminer (E_0, A, Z) .

La figure suivante est un exemple de télescope à trois étages utilisé pour mesurer les sections efficaces de fragmentation d'ions carbone sur des cibles d'intérêt biologique pour la hadronthérapie :



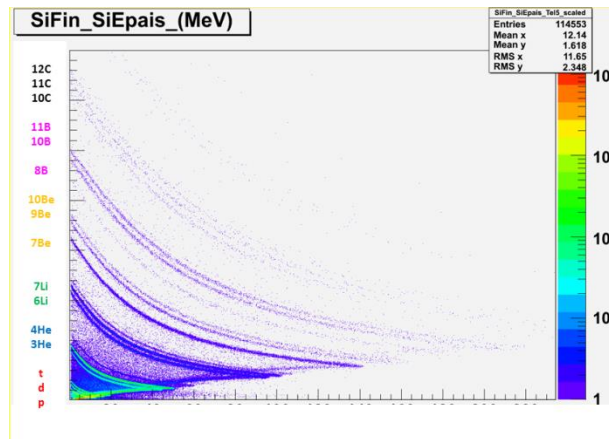
En fonction du (E_0, A, Z) de l'ion incident, donc de son parcours, plusieurs scénarii sont envisageables. S'il s'arrête dans le premier étage, on mesure son énergie, mais on ne sait pas l'identifier. S'il parvient au second étage, le couple $(\Delta E_1, E_2)$ permet de l'identifier sans ambiguïté. S'il s'arrête dans le troisième étage, il se place dans le rebroussement de la carte $(\Delta E_1, E_2)$, mais il peut être identifié sur une carte $(\Delta E_1 + \Delta E_2, E_3)$. Enfin, s'il traverse tout le télescope, il n'est pas identifiable.

Pour un couple de détecteurs, un ion incident donné n'a pas d'autre possibilité que de se retrouver quelque part sur l'une des lignes de la carte suivante :



La ligne verticale correspond à l'arrêt dans le premier détecteur. Les pseudo-hyperboles constituent le cas favorable (traversée du premier détecteur et arrêt dans le second). Les courbes retournant vers zéro constituent les rebroussements qui conduisent à des ambiguïtés d'identification que l'on peut lever en utilisant l'étage suivant. Les points le long de l'axe des ordonnées ou de rebroussement constituent des moyens très efficaces de calibration en énergie. On constate également qu'il manque des lignes dans cette carte. Leur absence est liée à la très faible durée de vie des ions en questions qui se désintègrent avant de parvenir au détecteur. C'est par exemple le cas du bore 9 ou du béryllium 8.

Une vraie expérience produit par exemple la carte suivante (Si_{thick} en abscisses et Si_{thin} en ordonnées) où chaque point correspond à un ion incident et l'échelle de couleurs indique le nombre de fois où cette occurrence a eu lieu:

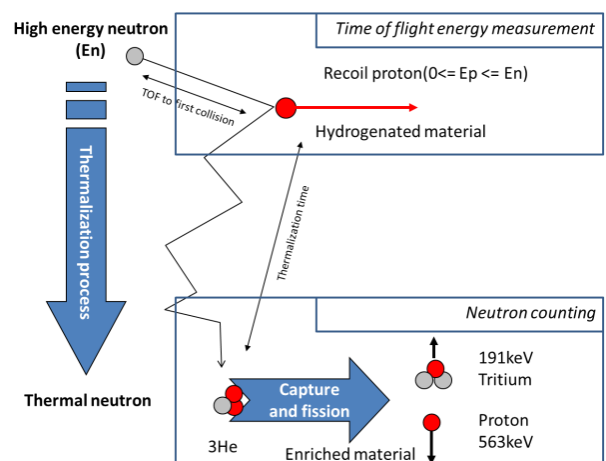


Le vrai exercice de calibration et d'identification peut alors commencer...

2.4 Les neutrons

La détection des neutrons, leur identification et la mesure de leur énergie constituent sans aucun doute une des plus grandes difficultés de l'instrumentation nucléaire. Deux approches, radicalement différentes émergent néanmoins. Elles sont illustrées sur la figure de droite :

- La collision sur des atomes d'hydrogène, qui permet de mesurer l'énergie de neutrons rapides par temps de vol (principalement pour les neutrons de haute énergie), en haut. On doit alors faire appel à des matériaux fortement hydrogénés pour maximiser la probabilité d'impact sur le proton.
- La capture sur des atomes neutrophiles, qui permet d'augmenter significativement la probabilité de détection des neutrons thermiques ou épithermiques, en bas. Ici, on utilise des matériaux enrichis en éléments neutrophiles pour maximiser la probabilité de capture après thermalisation.



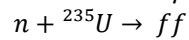
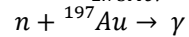
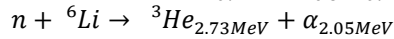
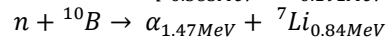
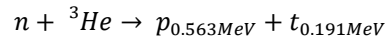
Le premier cas a déjà été évoqué plus haut. Un neutron de « haute énergie » (supérieure au MeV) frappe un proton qui va reculer. Le proton étant chargé, on va détecter ce recul et pouvoir l'utiliser pour mesurer un temps de vol, pourvu que l'instant de départ du neutron incident soit connu. On verra même plus loin qu'il est

possible de garantir, dans une très confortable mesure, que l'événement initial est bien le recul du proton (pas l'interaction d'un γ , par exemple).

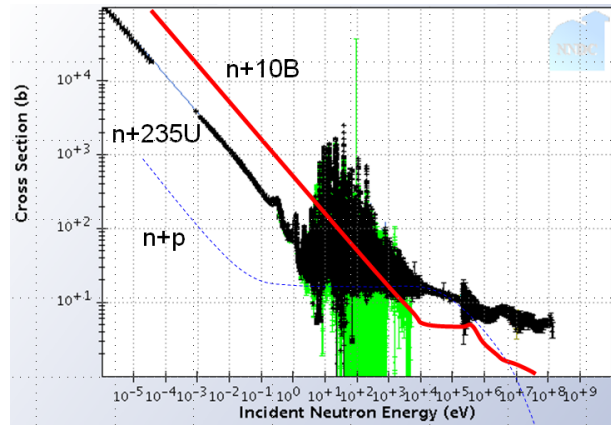
Dans la seconde approche, on va exploiter le fait que la section efficace de capture de neutron est très élevée pour certains atomes. Ces derniers, rendus instables après la capture, vont fissionner et on va pouvoir détecter les fragments. Ces réactions ont principalement lieu à « basses énergies », donc avec des neutrons thermiques et épithermiques. Il n'est plus, dès lors, d'aucun intérêt (ni même possible) de mesurer leur énergie puisqu'on a dû les thermaliser. On ne peut que les compter.

Parmi les réactions exploitables, on trouve les exemples suivants :

Réactions :



Dont quelques sections efficaces sont représentées ci-contre.



3 Éléments d'analyse de données

L'analyse de données fait encore partie de ces grands domaines qui font l'effet d'une friche dans laquelle il n'y a qu'à se baisser pour trouver des méthodes originales. On ne saurait plus se tromper qu'en pensant cela. Certes, la place est immense pour les nouvelles techniques, mais la statistique actuelle, avec en premier lieu l'approche Bayésienne a largement élargé le paysage et aggloméré l'art vers une science à peu près bien comprise. Il ne s'agit pas ici de faire le tour complet de ces méthodes, mais déjà d'exposer celles qu'il convient de maîtriser un minimum. Nous allons donc traiter des distributions usuelles de probabilités. Nous verrons comment proprement combiner les incertitudes de mesure à la façon Bayésienne puis nous examinerons quelques détails sur les techniques d'ajustement, au regard de la statistique.

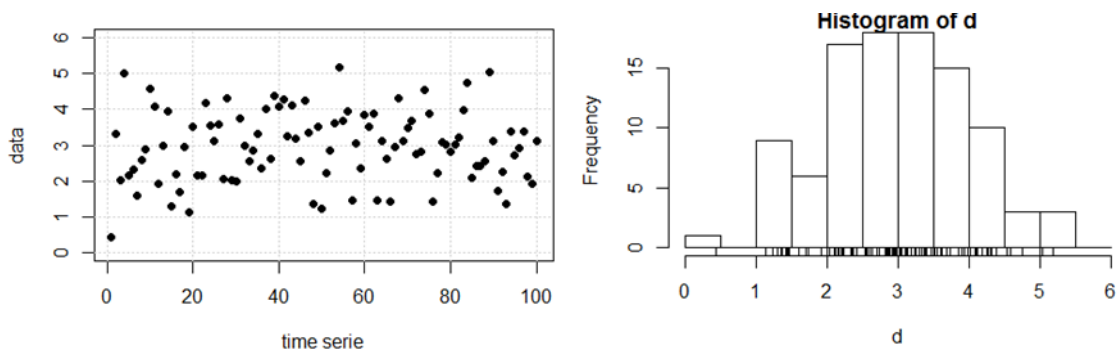
Tous ces résultats seront largement utilisés par la suite puisqu'en définitive, l'instrumentation consiste précisément à dresser des bilans d'incertitudes, sur des variables aléatoires, de façon à optimiser le fonctionnement de nos appareils.

3.1 Rappels de statistique

Nous allons rencontrer, tout au long de ce document, des éléments de statistique qu'il convient de bien comprendre.

3.1.1 Données, histogrammes, moyenne, variance et écart-type

Que ce soit sur l'analyse d'un spectre ou d'un signal échantillonné (mais les notions restent largement valables en continu, moyennant quelques adaptations qui seront explicitées plus loin), on dispose en définitive d'un nombre N de données d_i , acquises à des instants précis (séries temporelles), que l'on peut classer sous forme d'histogramme. Celui-ci n'est rien d'autre que le comptage du nombre coup $n[i]$ compris dans l'intervalle $\left[x_i - \frac{\Delta x}{2}, x_i + \frac{\Delta x}{2}\right]$. Dans ces conditions, on perd la notion de série temporelle. Cet histogramme est une réalisation statistique de la distribution de probabilité qui sous-tend les données.



L'estimateur de la moyenne vaut (à gauche, sur les données et à droite, une approximation pour les histogrammes) :

$$m = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1..N} d_i$$

$$m = \frac{\sum x_i \cdot n[i]}{\sum n[i]}$$

L'estimateur non biaisé de la variance est

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1..N} (d_i - m)^2$$

Et l'estimateur de l'écart-type (appelé écart-type empirique) vaut :

$$s = \sqrt{\frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1..N} (d_i - m)^2} \qquad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - m)^2 \cdot n[i]}{\sum n[i]}}$$

Cet estimateur est biaisé, i.e si on fait plusieurs expériences et si on calcule la moyenne des écarts-types expérimentaux, on n'obtient pas l'écart-type de la distribution sous-jacente.

On peut tout aussi bien effectuer un ajustement de l'histogramme par la distribution (supposée) des données. En définitive, nous avons réalisé une estimation des paramètres de cette distribution. Ces estimateurs ont des propriétés propres qui dépendent finement des données et de leur distribution (biais, convergence, sensibilité aux outliers, etc...). Ils n'ont donc pas une valeur unique, mais dépendent de la technique employée. Le tout est de bien vérifier que ce que l'on fait est conforme à ce qu'on pense faire, et pour cela, les simulations Monte-Carlo sont d'une aide précieuse.

Si on sait que les N données sont normalement distribuées (on note cela $d \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où μ est la moyenne et σ^2 est la variance) alors l'estimateur de la moyenne suit une loi normale et l'estimateur de la variance réduite suit une loi du χ^2 :

$$m \sim \mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{N}\right) \qquad \frac{N-1}{\sigma^2} \cdot s^2 \sim \chi^2(N-1)$$

Cela signifie par exemple que si, sur 200 données, on mesure une moyenne de 100 et un écart type de 5 (en réalité, une variance de 25), alors l'incertitude sur la moyenne est de l'ordre de $5/\sqrt{200} \approx 0.35_{\text{RMS}}$. Une loi du χ^2 à k degrés de liberté a un écart-type de $\sqrt{2 \cdot k}$. L'incertitude sur la mesure de la variance est donc de l'ordre de $25 \cdot \sqrt{2/199} \approx 2.5_{\text{RMS}}$. On connaît approximativement la variance à 10% près, on a donc l'écart-type (la racine de la variance) à 5% près, soit une incertitude sur l'écart-type expérimental avoisinant 0.25_{RMS} .

Dans le même ordre d'idée, si on dispose de N données dont on connaît les moyennes et écart-types théoriques, alors :

$$\sum_{i=1..N} \left(\frac{d_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi^2(N)$$

3.1.2 Données liées, matrice de covariance

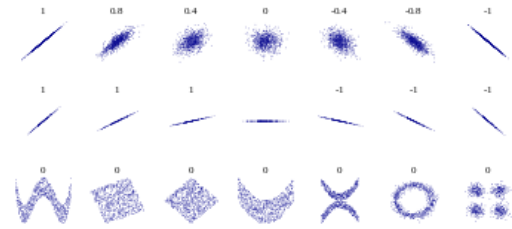
Quand on dispose de séries de données contenant plusieurs types de variables mesurées simultanément (par exemple, des triplets, $\{A_i, B_i, C_i\}_{i=1..N}$ dans trois détecteurs différents, etc.), alors la variance n'est pas suffisante pour représenter les données. On fait alors appel à la matrice de covariance dont les coefficients sont (à gauche) :

$$\sigma_{X,Y}^2 = \frac{1}{N-1} \cdot \sum_{i=1..N} (X - \mu_X) \cdot (Y - \mu_Y) \qquad \mathbf{Cov} = \begin{pmatrix} \sigma_{A,A}^2 & \sigma_{A,B}^2 & \sigma_{A,C}^2 \\ \sigma_{B,A}^2 & \sigma_{B,B}^2 & \sigma_{B,C}^2 \\ \sigma_{C,A}^2 & \sigma_{C,B}^2 & \sigma_{C,C}^2 \end{pmatrix}$$

La matrice de covariance (*Cov*, pour notre exemple de triplets) rassemble ces coefficients. Elle est symétrique et sa diagonale correspond à la variance des variables simples. Il est souvent utile de calculer également la matrice de corrélation dont les éléments correspondent à :

$$C_{X,Y} = \frac{\sigma_{X,Y}^2}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

A droite, quelques illustrations de coefficients de corrélation (origine, Wikipédia) :



La matrice de corrélation s'obtient directement à partir de la matrice de covariance. En général, Elle est diagonale unitaire quand les variables sont statistiquement indépendantes, sinon, elle exprime la fraction d'une variable qui peut expliquer l'autre variable, d'un point de vue statistique. On notera que la troisième ligne de la figure ci-dessus est une parfaite illustration du fait qu'il faut toujours représenter graphiquement ses données. Toutes les distributions ne sont pas « bien nées » et on a parfois quelques surprises quand on fait uniquement confiance aux grands indicateurs (moyenne, écart-type, etc.).

3.2 L'apport fondamental des techniques Bayésiennes

Ce paragraphe n'a pas pour ambition de traiter de l'approche Bayésienne de l'analyse de données, mais essentiellement d'attirer la curiosité sur une démarche originale et efficace. Pour un très joli exposé du sujet, on consultera avec beaucoup de bénéfices l'excellent « *Data Analysis, a Bayesian tutorial* » de Sivia & Skilling (Oxford Science Publications), sous-titré « *for scientists and engineers* », tout un programme !

L'approche Bayésienne de la statistique est tout à fait réjouissante dans le sens où elle formalise très concrètement tout ce que l'expérimentateur pense savoir et expliquer de ses résultats. Elle est basée sur la théorie des probabilités qui nous explique à la base, que si *A* et *B* sont des variables aléatoires dont l'une dépend de l'autre (peu importe dans quel sens), alors :

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$P(A|B)$ est appelé la probabilité conditionnelle et se lit « probabilité de A sachant B ».

L'exemple ci-dessus est anecdotique, mais la formule de Bayes prend une toute autre dimension quand on écrit sa version « sociale » :

$$P(\text{guilty}|\text{evidence}) = \frac{P(\text{evidence}|\text{guilty}) \cdot P(\text{guilty})}{P(\text{evidence})}$$

En physique, on préférera sans doute la version :

$$P(\text{model coefs}|\text{data}) = \frac{P(\text{data}|\text{model coefs}) \cdot P(\text{model coefs})}{P(\text{data})}$$

- $P(\text{data}|\text{model coefs})$ est appelé la *vraisemblance*
- $P(\text{model coefs})$ est *l'a priori* de l'expérimentateur sur la valeur de ses paramètres
- $P(\text{data})$ est le coefficient de Bayes. C'est une constante. Il n'a réellement d'importance que pour la comparaison de modèles entre eux.
- $P(\text{model coefs}|\text{data})$ est la *distribution a posteriori des paramètres, sachant les données*. C'est très précisément ce qui nous intéresse quand on fait de la mesure.

Si l'approche Bayésienne est souvent critiquée à cause de l'a priori, elle est quand même intellectuellement particulièrement satisfaisante. Son énorme avantage réside justement dans l'impérative nécessité de préciser ce que l'on pense de nos paramètres, ce que j'appelle les hypothèses de base. Quand on ne sait pas ce qu'il faut mettre, on peut toujours partir sur une distribution uniforme. Si on sait que le paramètre est forcément positif ou nul, on peut le définir aussi (ça change le résultat). Enfin, avec un peu d'expérience et en consultant la littérature, on trouve également comment définir proprement l'ignorance. Quand on connaît bien son détecteur ou que d'autres équipes ont fait des expériences sur le même sujet, on peut également définir des a priori informatifs où l'on intègre la connaissance que l'on estime avoir du problème. Dans une expérience bien conçue, l'a priori disparaît très rapidement en faveur de la vraisemblance et ce sont, en définitive, les données qui gouvernent le résultat sur les paramètres qu'on estime.

Pour comprendre le virage conceptuel que les techniques Bayésiennes génèrent, on peut prendre un petit exemple simple et plus fréquent qu'il y paraît. On observe un processus Poissonien que l'on ne connaît pas et qui nous génère en moyenne n coups dans une expérience. On sait simplement qu'il existe. Le bruit de fond (poissonien) du détecteur est parfaitement connu et vaut, en moyenne 10 coups par secondes. On compte $m=12$ coups. Que peut-on dire sur n ? Pour répondre, il suffit d'utiliser le formalisme ci-dessus :

1. la vraisemblance s'écrit :

$$P(m = 12 | n, BG = 10) = \frac{(n + 10)^{12} \cdot \exp(-n - 10)}{12!}$$

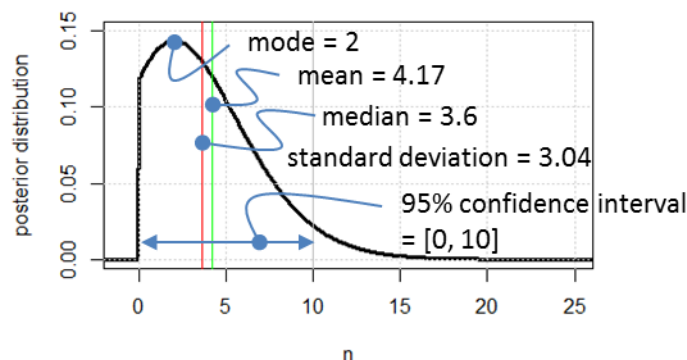
2. L'a priori est toujours un peu plus délicat. Disons qu'on peut commencer par dire que n suit une loi uniforme de 0 à l'infini (on parle d'a priori impropre car il n'est pas normalisable).

$$P(n) \sim \text{Unif}(0.. \infty)$$

3. On ne s'occupe pas du facteur de Bayes. Il suffira de normaliser correctement la distribution a posteriori
4. ... qui vaut :

$$P(n | m = 12, BG = 10) \propto \frac{(n + 10)^{12} \cdot \exp(-n - 10)}{12!} \cdot \text{Unif}(0.. \infty)$$

On peut noter ici que n ne suit pas une loi de Poisson mais quelque chose qui ressemble à une loi gamma. C'est le comptage qui suit une loi de Poisson. Il ne reste donc qu'à représenter l'a posteriori (correctement normalisé) pour obtenir la densité de probabilité de la distribution de n :



On ne saurait être plus précis avec les données dont on dispose. Si on avait posé la question « d'après vous que vaut n », on aurait intuitivement répondu « pas loin de 2 ». C'est bien la valeur la plus probable, encore appelé mode de la distribution, mais c'est tout ! En fin de compte, il y a aussi une chance sur deux pour que le résultat soit supérieur à 3,6...

Le théorème de Bayes peut aussi être interprété comme un apprentissage progressif sur les données au fur et à mesure qu'elles se présentent. Ainsi, on fait une nouvelle expérience dans laquelle on mesure 15 coups, la fonction de vraisemblance est la même que précédemment (si ce n'est que le résultat vaut maintenant 15, pas 12), seul change l'a priori qui, cette fois, correspond à la distribution obtenue juste au-dessus – l'a priori n'est

donc plus uniforme. On peut donc utiliser le même processus pour obtenir la nouvelle distribution a posteriori des paramètres.

L'approche Bayésienne prend toute son envergure dans les cas un peu compliqués (peu de données, distributions sophistiquées, analyses complexes). Quand les données sont « bien nées » (bruit gaussien) et/ou nombreuses et/ou les comptages sont raisonnablement élevés, on va généralement pouvoir dériver des approches plus simples qui ne sont, en définitive que des développements limités du formalisme complet. C'est par exemple le cas de la combinaison des incertitudes de mesure, telle qu'elle est formalisée par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) dans son guide « *Guide to the expression of uncertainty in measurement* » et résumée par le NIST dans sa « *technical note* » tn1297, documents que l'on consultera avec empressement (en téléchargement avec beaucoup d'autres) quand on s'intéresse au sujet.

3.3 Combinaison des incertitudes

Il est extrêmement rare qu'une mesure se suffise à elle-même. En général, on utilise plusieurs mesures X_i pour fabriquer de toute pièce une observable Y plus intéressante. Dès lors, quelle est l'incertitude sur cette grandeur ? Si on connaît les distributions de probabilités associées à chaque variable aléatoire, on peut, en appliquant le formalisme Bayésien, déterminer très précisément la distribution de probabilité du résultat final, et donc son incertitude (l'écart-type de la distribution obtenue). C'est toujours très instructif, pour ne pas dire fondamental, ceci d'autant plus que le résultat s'écarte de la distribution normale. Dans le cas où toutes les distributions sont normales, on dispose d'un résultat « simple ». Si

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

Alors,

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1..N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^2 + 2 \cdot \sum_{i=1..N-1} \sum_{j=i+1..N} \frac{\partial f}{\partial X_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial X_j} \cdot \sigma_{X_i X_j} = \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \cdot \mathbf{Cov} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{X}} \right)$$

Quand les variables aléatoires sont décorrélées les unes des autres, l'expression se simplifie singulièrement :

$$\sigma_Y = \left| \frac{\partial f}{\partial X_1} \right| \cdot \sigma_{X_1} \oplus \left| \frac{\partial f}{\partial X_2} \right| \cdot \sigma_{X_2} \oplus \dots \oplus \left| \frac{\partial f}{\partial X_N} \right| \cdot \sigma_{X_N} = \sqrt{\sum_{i=1..N} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i} \right)^2 \cdot \sigma_{X_i}^2}$$

Où le symbole \oplus signifie qu'on effectue la somme quadratique des termes avant d'en prendre la racine carrée.

Le vocabulaire de la métrologie est très rigoureux (on ne plaisante pas avec la mesure !). En premier lieu, on ne combine que les variances et on annonce toujours l'écart-type (i.e. la valeur efficace). Combiner autre-chose que des variances n'a généralement rigoureusement aucun sens ! Quand il n'y a pas d'explicitation sur l'incertitude, c'est TOUJOURS une valeur efficace (on peut la noter quand même en indice, σ_{RMS} , pour bien spécifier qu'il s'agit d'une incertitude). Si on veut parler de largeur à mi-hauteur, il FAUT³ le mentionner explicitement, par exemple en ajoutant un σ_{FWHM} derrière l'incertitude, idem avec le pic à pic et σ_{PKtoPK} (ou toute autre abréviation explicite). On parle alors de facteur d'élargissement (Coverage factor).

³ Il est extrêmement désagréable de se voir confier un cahier des charges pour un équipement dans lequel l'incertitude à atteindre est clairement explicitée, et d'apprendre 1 an plus tard que le rédacteur parlait en largeur totale à mi-hauteur, mais qu'il avait omis de le préciser !!!

Quand on dispose d'une mesure expérimentale de l'incertitude d'une variable aléatoire ou qu'on sait évaluer sa distribution de probabilité, on dit qu'il s'agit d'une incertitude de type A. Quand ça n'est pas le cas, l'expérimentateur doit décrire son a priori sur la distribution de probabilité de la variable aléatoire. On parle d'incertitude de type B.

3.3.1 Un exemple, l'incertitude de mesure par temps de vol

Illustrons ce résultat important sur un exemple simple. On veut mesurer l'énergie d'un neutron en mesurant son temps de vol d'une cible active à un détecteur situé à $L=1\text{m}$ et d'épaisseur $e=10\text{cm}$. On connaît notre détecteur et son électronique et on sait qu'il mesure l'instant de passage d'une particule à $200\text{ps}_{\text{RMS}}$ près. Le signal de départ est donné par une autre équipe et on n'a pas de doute sur sa compétence. Ils nous ont annoncé une incertitude de $400\text{ps}_{\text{FWHM}}$... Le temps de vol enregistré était de 15ns . Quelle est l'incertitude sur son énergie ? En laissant de côté les aspects relativistes, on a :

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot c^2 \cdot \left(\frac{v}{c}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot m_n \cdot c^2 \cdot \left(\frac{1}{c} \cdot \frac{L}{t_{\text{stop}} - t_{\text{start}}}\right)^2$$

Où $m_n \approx 1\text{GeV} \cdot c^{-2}$ et v est exprimé en unités de c ($=30\text{cm} \cdot \text{ns}^{-1}$). On tire, bien entendu $E=24.7\text{MeV}$. On a ici trois variables aléatoires : la distance de vol (connue à 10cm près) et les deux temps utilisés pour mesurer le temps de vol, T . Elles sont décorrélées les unes des autres. L'incertitude sur E vaut donc :

$$\sigma_E = m_n \cdot c^2 \cdot \frac{L}{c^2 \cdot T^2} \cdot \sigma_L \oplus m_n \cdot c^2 \cdot \frac{L^2}{c^2 \cdot T^3} \cdot \sigma_{t_{\text{start}}} \oplus m_n \cdot c^2 \cdot \frac{L^2}{c^2 \cdot T^3} \cdot \sigma_{t_{\text{stop}}}$$

Puis on dresse le bilan d'incertitudes :

Variable aléatoire	type	Contribution à l'incertitude
Base de vol L		
Distribution uniforme de largeur e (la particule peut interagir n'importe où entre $\left[L - \frac{e}{2}; L + \frac{e}{2}\right]$) $\rightarrow \sigma_L = \frac{e}{\sqrt{12}} = 2,9\text{cm}_{\text{RMS}}$	A	1.43MeV
Instant d'arrivée t_{stop}		
Distribution normale mesurée $\rightarrow \sigma_{t_{\text{stop}}} = 200\text{ps}_{\text{RMS}}$	A	0.66MeV
Instant de départ t_{start}		
L'équipe nous a donné une incertitude en largeur à mi-hauteur sans préciser la distribution. Nous la supposons normale. Comme nous faisons une hypothèse, c'est une incertitude de type B $\rightarrow \sigma_{t_{\text{start}}} = 400\text{ps}_{\text{FWHM}} / 2.35 = 170\text{ps}_{\text{RMS}}$	B	0.56MeV
synthèse		1.67MeV _{RMS}

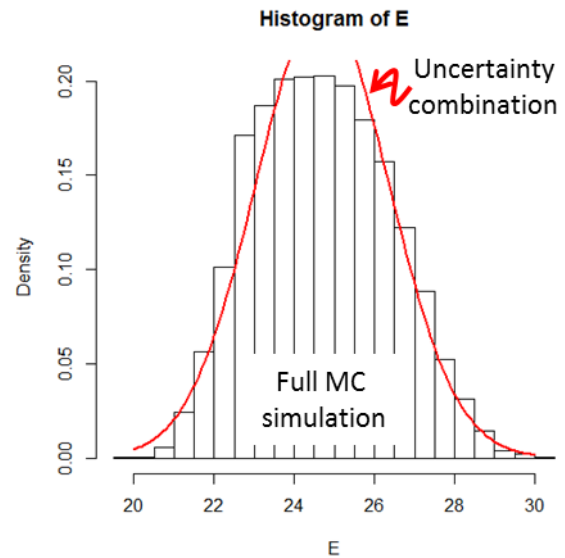
Cette démarche est rigoureuse. On sait à présent que ce sont les 10cm d'épaisseur du détecteur qui nous pénalisent le plus et qu'on ne maîtrise pas la donnée de nos collègues (type B).

Bien entendu, on peut également utiliser l'équation d'incertitude pour dimensionner correctement notre solution instrumentale (on sait qu'on veut mesurer 24.7MeV et on peut jouer sur la longueur de vol). Pour cela, il suffirait de réinjecter l'énergie du neutron dans l'équation pour apprendre que :

$$\sigma_E = 2 \cdot E \cdot \frac{\sigma_L}{L} \oplus \frac{(2 \cdot E)^{3/2}}{\sqrt{m_n \cdot c^2}} \cdot \frac{c}{L} \cdot (\sigma_{t_{start}} \oplus \sigma_{t_{stop}})$$

En reprenant les données ci-dessus, si nous désirons une incertitude en énergie de 1MeV à 24.7MeV, il suffit de placer le détecteur à $L= 167\text{cm}$, au détriment du taux de comptage qui serait divisé par 2,8 !

Revenons à notre problème initial. Un exercice intéressant consiste à comparer les résultats simples et efficaces fournis par la technique de combinaisons d'incertitudes et la vraie vie. Nous avons par exemple approximé, ci-dessus, le point d'interaction par une distribution uniforme (de largeur 10cm, donc d'écart-type $10\text{cm}/12^{-1/2}=2,9\text{cm}$). Cela peut sembler un peu abrupt car la vraie profondeur d'interaction obéit au mieux, en réalité, à une loi exponentielle. Pour s'assurer du résultat, on peut comparer la distribution d'énergie obtenue par un Monte-Carlo (qui suppose juste que la physique est bonne) et la technique de combinaison d'incertitudes (qui est principalement valable pour des distributions normales). La figure ci-contre illustre les résultats obtenus avec les informations du problème -par Monte-Carlo pour une dizaine de milliers de particules, en noir, et par calcul en rouge-. Comme on pouvait s'y attendre, la technique de combinaison des incertitudes ne permet pas de décrire la complexité de la distribution d'événements observés, mais elle est juste, à la fois pour la valeur moyenne, mais également pour la largeur de la distribution, ce qui n'est déjà pas si mal en soi !



3.3.2 Incertitude de mesure sur l'énergie déposée dans un spectromètre

En définitive, l'incertitude de mesure sur l'énergie d'une particule incidente, au moyen d'un spectromètre, par exemple, va généralement pouvoir s'exprimer comme la somme quadratique de trois termes dont il convient de bien comprendre l'origine:

$$\sigma_E = a_0 \oplus a_{1/2} \cdot \sqrt{E} \oplus a_1 \cdot E$$

- a_0 exprime généralement l'incertitude liée au bruit électronique de la chaîne d'instrumentation. Son origine peut aussi bien être liée au détecteur, qu'à l'électronique associée, ou encore à la compatibilité électromagnétique ou au bruit microphonique.
- $a_{1/2}$ est lié à la nature « quantique » de la mesure. En définitive, on mesure toujours un nombre N de quanta (paires électrons/ions, électrons/trous, photons) et la fluctuation sur ce nombre de quanta est toujours proportionnelle à \sqrt{N} (égale dans le cas d'une distribution poissonnienne).
- a_1 quantifie les variations de sensibilité de la chaîne. Ce terme informe par exemple sur les non-linéarités, mais également sur les variations de gain, le long d'un fil de compteur proportionnel par exemple, ou encore sur la variation d'épaisseur d'une chambre d'ionisation.

En observant attentivement l'évolution de l'incertitude avec l'énergie déposée, il est donc possible de diagnostiquer très précisément l'origine de problèmes pouvant affecter un détecteur.

3.4 Ajustements, optimisation et tutti quanti

Nous avons toujours besoin d'ajuster des résultats expérimentaux par des modèles plus ou moins théoriques. Ça sera d'ailleurs le cas plus loin lorsque nous voudrions déterminer la forme de filtres optimaux. Là encore, l'approche Bayésienne nous guide vers des solutions robustes et (relativement) aisées à comprendre, quand il n'est pas nécessaire de la mettre en œuvre dans toute sa généralité.

Le problème d'ajustement revient, en définitive, à trouver la valeur de paramètres inconnus qui permet de décrire le plus proprement possible les données. Pour cela, on dispose de paramètres libres du modèle f , les X_i , et de données, d_j . Le modèle, quand on lui confie le vecteur \vec{X} et le vecteur de données \vec{d} , doit nous fournir, dans le cas général, la probabilité d'avoir observé les données compte tenu de l'état des paramètres. Sous cette définition très générale, ajuster des paramètres revient à maximiser cette probabilité. C'est ce qu'on appelle le principe du maximum de vraisemblance ou maximum likelihood.

Exprimé tel quel, le problème d'ajustement paraît un peu abstrait. Il découle en fait directement du théorème de Bayes qui en constitue une généralisation, mais qui explicite néanmoins clairement ses simplifications heureuses. Par ordre de complexité :

On dispose de données dont on connaît la distribution et on a des a priori qu'on sait et/ou qu'on doit justifier.

- ➔ On doit appliquer les techniques d'inférence Bayésienne en utilisant la formule de Bayes.

$$P(\text{model coefs}|\text{data}) \propto P(\text{data}|\text{model coefs}) \cdot P(\text{model coefs})$$

Pour cela, il convient, ou bien d'écrire le théorème de Bayes (comme nous l'avons fait au-dessus pour le problème de comptage), ou bien d'utiliser des techniques de Monte-Carlo spécifiquement développées (MCMC pour Markov Chain Monte-Carlo). Ces dernières explorent la vraisemblance et l'a priori en se déplaçant sur la distribution a posteriori des paramètres. On récupère donc directement le résultat attendu sous une forme peu usuelle, mais ô combien informative, la distribution jointe a posteriori des paramètres suivant les données (comme pour le problème de comptage, mais avec autant de dimensions qu'il y a d'inconnues).

Par exemple, dans le problème de comptage, si une autre équipe avait déterminé que le phénomène inconnu était gouverné par une loi exponentielle de paramètre $\lambda=3$, on aurait écrit :

$$P(n|\text{data}, BG = 10, \lambda = 3) \propto \text{Poisson}(N = 12 | BG = 10, n) \cdot \text{Exp}(n | \lambda = 3)$$

Et le résultat aurait été différent...

Si l'a priori n'est pas fort (a priori vagues correspondant à des lois uniformes, non bornées, beaucoup de données)

- ➔ Le résultat est gouverné par la fonction de vraisemblance. Quand les données sont poissonniennes par exemple, la vraisemblance est le produit des distributions.

$$P(\text{model coefs}|\text{data}) \propto P(\text{data}|\text{model coefs})$$

C'est donc elle qu'il convient de maximiser, ou plus particulièrement son logarithme (on parle de log-vraisemblance ou de log-likelihood). En effet, maximiser une fonction positive ou son logarithme conduit au même minimum, mais comme la vraisemblance est un produit de probabilités, elle est rapidement très petite quand le nombre de variables augmente. C'est moins vrai de la log-vraisemblance. On vient ici de dire que le théorème de Bayes conduit au maximum de vraisemblance lorsque les a priori sont faibles.

Si, en plus, les distributions sont normales ou proches de la normalité, il faut savoir établir le modèle μ et la matrice de covariance σv . C'est déjà ce que l'on faisait ci-dessus, mais dans le cas normal, cela revient « simplement » à ces deux paramètres :

- La vraisemblance se résume à une loi normale multidimensionnelle qui s'écrit (sous forme matricielle) :

$$P(\text{model coefs}|\text{data}) \propto P(\text{data}|\text{model coefs}) \\ = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \sqrt{|\text{Cov}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \text{Cov}^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})\right) \propto \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \chi^2\right)$$

Seul le terme dans l'exponentielle dépend explicitement des données. On reconnaît (ça n'est pas évident, mais avec un peu d'effort...) un χ^2 généralisé. Par conséquent, maximiser la vraisemblance revient donc à minimiser le χ^2 :

$$\chi^2 = (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \text{Cov}^{-1} \cdot (\mathbf{d} - \boldsymbol{\mu})$$

Si, par ailleurs, les variables aléatoires sont indépendantes, décorrélées les unes des autres :

- Alors, ne resteront que les éléments diagonaux de la matrice de covariance et le résultat se simplifie encore. On doit maintenant minimiser (toujours) un χ^2 qui s'écrit :

$$\chi^2 = \sum \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

Si les écart-types sont tous égaux,

- Alors, on n'a plus besoin d'exprimer l'incertitude et on cherche à minimiser

$$\sum (x_i - \mu_i)^2$$

Tout est donc clairement explicité par le formalisme de l'approche Bayésienne ! Notons au passage que le terme χ^2 n'est pas simplement un raccourci linguistique pour « somme des écarts quadratiques des données au modèle pondérés par la variance », mais fait bel et bien référence à la distribution qui porte son nom. Par conséquent, quand on effectue un ajustement en utilisant un χ^2 , on doit logiquement le terminer par un test statistique. Si on dispose de N données expérimentales et qu'on estime P paramètres, alors $\chi^2 \sim \chi^2(N - P)$.

Pour conclure ce chapitre, il faut noter un dernier détail intéressant. Quand on applique les approches Bayésiennes directes (par calcul ou MCMC), on dispose des distributions jointes des paramètres qui nous permettent de calculer leur incertitude et leurs corrélations (par la matrice de covariance). C'est très pratique et souvent très informatif, quand on s'aperçoit par exemple que deux paramètres sont parfaitement corrélés. On devrait, et on peut également réaliser ce travail quand on minimise un χ^2 . Pour cela, il suffit de remarquer les choses suivantes :

Le travail du solver (quel qu'il soit), consiste à minimiser le χ^2 qui, comme nous l'avons expliqué est très proche de la log-vraisemblance L (en fait, $L = -\frac{1}{2} \cdot \chi^2 + \text{constante}$). Au minimum ($X_{i=1..P} = X_{i=1..P}^0$), on a donc :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial X_i} \right)_{X_{i=1..P} = X_{i=1..P}^0} = 0$$

Et on peut faire un développement limité de la log-vraisemblance, sur les paramètres, en ce point :

$$L \sim L_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1..P} \sum_{j=1..P} (X_i - X_i^0) \cdot (X_j - X_j^0) \cdot \frac{\partial^2 L}{\partial X_i \cdot \partial X_j} = L_0 + \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)^T \cdot \mathbf{H}_L \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)$$

Où \mathbf{H}_L est la matrice Hessienne. Elle est constituée des dérivées secondes de la log-vraisemblance par rapport aux paramètres. On sait évaluer cette matrice (par différences finies, par exemple).

On a donc :

$$P(\text{model coefs}|\text{data}) \propto \exp(L) \propto \exp\left(\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)^T \cdot \mathbf{H}_L \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)\right)$$

A rapprocher, pour des variables aléatoires gaussiennes, de

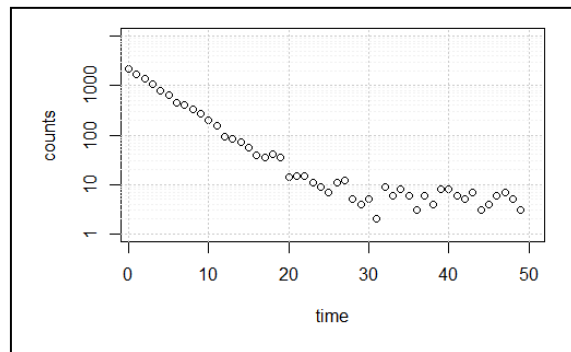
$$P(\text{model coefs}|\text{data}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}} \cdot \sqrt{|\mathbf{Cov}|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)^T \cdot \mathbf{Cov}^{-1} \cdot (\mathbf{X} - \mathbf{X}^0)\right)$$

On en déduit donc une approximation très intéressante :

$$\mathbf{Cov} = -\mathbf{H}_L^{-1} = 2 \cdot \mathbf{H}_{\chi^2}^{-1}$$

On a donc accès à l'incertitude des paramètres estimés (sous les hypothèses mentionnées).

Nous allons illustrer tout cela sur un petit problème concret. Nous avons implanté une quantité inconnue de produit radioactif de durée de vie également inconnue. Nous mesurons le comptage acquis par pas de 1s et obtenons le résultat illustré sur la figure ci-contre. Nous cherchons à évaluer le nombre N de radioéléments, sa durée de vie τ et le bruit de fond BG . Pour cela, nous allons procéder à la mode « maximum de vraisemblance » et à la mode « minimisation de χ^2 ». Pour les besoins de l'exercice, nous avons choisi, $N=10000$, $\tau=4$ et $BG=5$, mais ces valeurs exactes nous sont pour le moment inconnues.



Pour le maximum de vraisemblance, nous savons que le comptage dans chaque pas de temps suit une loi de Poisson. Il nous faut établir le modèle du comptage attendu en fonction du temps à chaque bin. Celui-ci s'écrit :

$$\Delta N_{t..t+bin} = N_0 \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{bin}{\tau}\right)\right) + BG$$

Où t est l'instant du bin qui s'étend dans le domaine $[t, t + bin[$. Dès lors, si à l'instant t , on a compté $n[t]$, la probabilité d'avoir observé ce résultat s'écrit :

$$P(n[t]) = \frac{1}{n!} \cdot (\Delta N_{t..t+bin})^n \cdot \exp(-\Delta N_{t..t+bin})$$

Dès lors, la vraisemblance est le produit des probabilités à tous les instants de mesure et la log-vraisemblance en est le logarithme népérien. Sur l'exemple ci-dessus, le solveur de **R** nous donne : $N=10024.3$, $\tau=4.007$ et $BG=5.21$. La matrice Hessienne (à gauche) et son inverse, la covariance (à droite) valent :

\mathbf{H}_L^{-1}			$\mathbf{Cov} \cong -\mathbf{H}_L^{-1}$				
	[, 1]	[, 2]	[, 3]		[, 1]	[, 2]	[, 3]
[1,]	9.845701e-05	0.007464736	0.002461102	[1,]	10333.3381261	-0.305863136	-6.138062382
[2,]	7.464736e-03	539.795757961	-14.331555435	[2,]	-0.3058631	0.002019060	0.006112148
[3,]	2.461102e-03	-14.331555435	4.857379543	[3,]	-6.1380624	0.006112148	0.227016025

On apprend donc que l'incertitude sur le comptage vaut $\sqrt{10333} \approx 100$ comme on pouvait s'y attendre. L'incertitude sur la durée de vie du radioélément est de 0.045s, à comparer au résultat exact $\tau/\sqrt{N}=0.039$. Le fond est mesuré avec une incertitude de 0.48.

Pour l'essai avec le χ^2 , nous devons minimiser la variable aléatoire :

$$\chi^2 = \sum_t \frac{(n[t] - \Delta N_{t,t+bin})^2}{\Delta N_{t,t+bin}}$$

Le minimum est obtenu pour un χ^2 de 50.0. On attendait 47 (50 points de mesure et 3 inconnues) avec un écart-type de $\sqrt{2 \cdot 47}=9.5$, donc tout va bien. Le résultat du fit est $N=10032$, $\tau=4.017$ et $BG=5.55$.

La matrice Hessienne et la matrice de covariance valent maintenant :

H_{χ^2}				$Cov \cong 2 \cdot H_{\chi^2}^{-1}$			
	[,1]	[,2]	[,3]		[,1]	[,2]	[,3]
[1,]	0.0001965886	-0.01560129	0.004891227	[1,]	10361.1535788	0.32137347	-6.51584301
[2,]	-0.0156012947	1072.54486884	28.091538654	[2,]	0.3213735	0.00203749	-0.00641779
[3,]	0.0048912269	28.09153865	9.163300714	[3,]	-6.5158430	-0.00641779	0.24141476

On retrouve des résultats tout à fait similaires au cas précédant, bien que pas rigoureusement identiques. La raison en est la suivante : le χ^2 suppose que les mesures sont normalement distribuées, ce qui est approximativement le cas en début de décroissance, mais très approximatif à la fin, quand il n'y a plus que le bruit de fond. C'est donc bien sur l'estimation de ce dernier qu'on commet la plus grosse erreur, en dépit d'un résultat a priori correct (pour s'en convaincre, il faudrait répéter l'exemple un grand nombre de fois).

Tout cela fonctionne donc très bien, modulo le petit bémol sur le modèle dans le second cas. On dispose de la valeur des paramètres et leurs incertitudes. Les deux approches paraissent identiques car les distributions des paramètres sont approximativement normales. Quand ça n'est pas le cas, il faut prendre tout l'arsenal des MCMC (Markov Chain Monte-Carlo) pour obtenir des prédictions utiles.

4 Transport des charges secondaires

L'étude de la formation du signal au sein même du détecteur est une étape fondamentale de la conception. Avant de parvenir à réaliser cet exercice, il faut savoir transporter les charges créées par la particule incidente au sein de notre détecteur. Nous allons faire ici quelques rappels d'électrostatique suivis d'un large panorama des phénomènes qui affectent nos charges secondaires dans les milieux constituant les détecteurs (vide, gaz ou solides). Nous illustrerons ce chapitre en étudiant deux types de détecteurs couramment utilisés : les chambres à dérive et les détecteurs solides, plus spécifiquement le germanium hyper-pur.

4.1 Un peu d'électrostatique

4.1.1 Le champ électrique dans un détecteur

Un détecteur de physique nucléaire est toujours constitué d'un milieu sensible. Dans ce milieu, la particule incidente dépose les charges qui seront mesurées. Celles-ci sont transportées par le champ électrique qui règne dans le détecteur et induisent le signal. La première connaissance pratique à acquérir consiste donc à savoir calculer le champ électrique en question. Pour cela, il suffit de faire appel à quelques connaissances élémentaires en électrostatique.

Si on connaît, en tout point de l'espace, la densité volumique de charge d'espace (ρ en $C.m^{-3}$) et le potentiel V_i sur chaque électrode i constituant le détecteur, alors, le potentiel $V(x,y,z)$ s'écrit (Equation de Poisson, Δ est l'opérateur Laplacien) :

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \text{ avec les conditions aux limites : } V(\text{électrode } i) = V_i$$

Le paramètre ϵ est la permittivité du matériau constituant le détecteur. C'est le produit de la permittivité du vide, ϵ_0 , qui vaut $8.85pF.m^{-1}$, par la permittivité relative, ϵ_r , dont on trouvera quelques valeurs usuelles dans le tableau ci-contre.

material	Rel. permittivity
gas	1
Silicon	11,9
Germanium	16
PCB	≈ 4

A partir de là, le champ électrique \vec{E} découle directement :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V = -\begin{pmatrix} \partial V / \partial x \\ \partial V / \partial y \\ \partial V / \partial z \end{pmatrix}$$

La résolution des équations aux dérivées partielles peut représenter un solide problème mathématique. Fort heureusement, il existe de nombreuses bibliothèques informatiques capables de se charger de cette opération à notre place, les plus puissantes utilisant des méthodes par éléments finis.

En tout état de cause, nous pouvons admettre que nous connaissons à présent le champ électrique en tous points de l'espace.

4.1.2 Interlude électronique

Des charges sont créées dans le détecteur par les rayonnements incidents et sont mises en mouvement par le champ électrique qui y règne. Nous verrons plus loin que le modèle du détecteur est fort logiquement un générateur de courant. On voudra, plus tard mesurer la charge déposée, ou bien la forme d'impulsion produite par ces particules incidentes. Ces deux informations sont liées et si le courant est nul avant $t=0$, alors :

$$i(t) = \frac{dQ}{dt} \quad \text{et} \quad Q(t) = \int_0^t i(t) \cdot dt$$

La charge totale Q_{tot} développée par un générateur de courant revient à prendre l'intégrale ci-dessus jusqu'à l'infini :

$$Q_{tot} = \int_0^{\infty} i(t) \cdot dt$$

Nous aurons besoin, plus tard, de simplifier les modélisations (en particulier lorsque la nature évolutive du générateur de courant n'aura pas d'importance). Pour cela, il est utile de savoir exprimer correctement une impulsion de courant. En fait, une impulsion de courant peut être vue comme l'expression instantanée de la circulation d'une quantité de charges Q_0 . Dès lors, en utilisant les expressions ci-dessus, on tire :

$$Q(t) = Q_0 \cdot H(t) \quad \text{et} \quad i(t) = Q_0 \cdot \delta(t)$$

Où H est l'échelon de Heaviside (0 pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$) et δ l'impulsion de Dirac (homogène à des s^{-1}).

4.2 Transport des charges

Le transport des charges électriques dans le champ du détecteur dépend de la nature des charges en question et du milieu dans lequel elles se déplacent. Nous supposons par la suite, qu'il n'y a pas de champ magnétique environnant, ce qui est généralement le cas en physique nucléaire⁴.

4.2.1 Dans le vide

Le cas le plus simple est bien entendu le vide pour lequel il suffit d'intégrer les équations du mouvement :

$$m \cdot \vec{a} = q \cdot \vec{E}$$

On rencontre ce genre de problème dans les tubes photomultiplicateurs ou pour les galettes à micro-canaux.

⁴ Les physiciens des hautes énergies bénéficient souvent d'un champ magnétique, fondamental pour identifier les particules, qui peut « gratuitement » être utilisé pour améliorer certaines performances des détecteurs comme la diffusion, par exemple.

4.2.2 Electrons et ions dans les milieux gazeux

Dans les milieux gazeux, la distance entre molécules n'est pas aussi grande que l'on pourrait le penser. A pression atmosphérique, par exemple, la distance moyenne entre molécules est de l'ordre de 3nm. Le gaz opère alors comme une force de frottement s'opposant au mouvement des charges.

On doit distinguer le mouvement des ions (lourds, subissant des collisions élastiques) de celui des électrons (légers, subissant des collisions élastiques pour les champs faibles et inélastiques lorsque l'intensité du champ électrique augmente). Nous verrons plus loin que, pour les électrons ou les ions, c'est la vitesse qui est contrôlée par le champ électrique.

Dans un milieu gazeux, les collisions incessantes avec les molécules environnantes vont perturber la trajectoire des particules chargées. Nous parlons ici du phénomène de diffusion qui sera examiné après.

Enfin, si l'intensité du champ électrique le permet, un électron peut acquérir suffisamment d'énergie entre deux collisions pour ioniser la molécule qu'il vient de percuter. On comprend aisément que ce phénomène peut conduire à une avalanche de charges qui peut être exploitée pour amplifier le nombre d'électrons mesurés. Nous examinerons ce processus pour conclure le paragraphe du transport dans les gaz.

4.2.2.1 Vitesse des charges

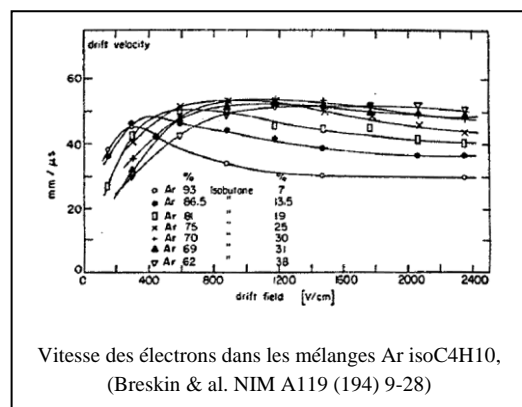
Pour le cas des ions, la vitesse est directement proportionnelle au champ électrique, mais elle dépend également de la pression. En pratique, on peut se satisfaire de l'expression suivante (valable pour un champ électrique inférieur à $\approx 15 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$ à pression atmosphérique) :

$$\vec{v} = \mu \cdot \frac{P_{atm}}{P} \cdot \vec{E}$$

μ est la mobilité. Elle s'exprime en $\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. On peut retenir que sous un champ de $1 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$, à pression atmosphérique, la mobilité typique est de l'ordre de $2 \text{ cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, ce qui donne une vitesse moyenne de $2 \text{ cm} \cdot \text{ms}^{-1}$.

Ions in their own gas	Mobility ($\text{cm}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)
He+	10.4
Ne+	4.14
Ar+	1.53
CH4+	2.26
isoC4H10+	0.61

Pour les électrons, il n'y a pas de formalisme simple et il faut recourir à des tables ou des figures que l'on trouve dans les articles (voir ci-contre). On retiendra ici que la vitesse des électrons sature assez rapidement vers une limite. Elle devient alors peu sensible à l'intensité du champ électrique. Dans le cas évoqué ci-contre, cette vitesse est de l'ordre de $4 \text{ cm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$, soit 2000 fois plus grande que celle des ions.



Dans les deux cas (électrons ou ions), on dispose d'une relation entre le vecteur vitesse et le champ électrique. Il suffit d'intégrer cette équation pour connaître la position de

la charge au cours du temps. On peut toujours exprimer la vitesse en fonction du champ électrique à travers la mobilité, mais dans le cas des électrons, la mobilité dépend également du champ électrique.

4.2.2.2 Diffusion

Pendant leur transport, les charges ne se contentent pas de suivre les lignes de champ. Les collisions incessantes avec les atomes du milieu conduisent à un phénomène de diffusion qui a été décrit par Einstein. Dans ses grandes lignes (que nous ne dépasserons pas ici⁵), ce phénomène de diffusion conduit à des résultats assez amusants qu'il est utile de connaître lorsqu'on cherche à atteindre des résolutions spatiales importantes.

Prenons une charge se déplaçant suivant l'axe z à vitesse v constante. La probabilité de trouver cette charge à la position (x,y,z) à un instant t s'écrit :

$$\frac{dP}{dxdydz} = \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot \sigma)^3} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + (z - v \cdot t)^2}{\sigma^2}\right)$$

Où σ est l'écart-type de la distribution de probabilité (elle s'exprime en cm et on a supposé ici que la diffusion transverse était de même nature que la diffusion longitudinale. C'est la simplification mentionnée plus haut). Einstein a donc montré que l'écart-type en question était lié au temps (c'est la « marche aléatoire ») à travers le coefficient de diffusion D (en $\text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) :

$$\sigma = \sqrt{2 \cdot D \cdot t}$$

Et surtout que ce coefficient de diffusion était lui-même lié à la mobilité :

$$\frac{D}{\mu} = \frac{k \cdot T}{e} = 0,026\text{eV}$$

Par définition dans les milieux gazeux, $v = \frac{L}{t} = \mu \cdot E$, où L est la distance parcourue dans le temps t . On en déduit que l'écart-type de la distribution de probabilité devient :

$$\sigma = \sqrt{0,052 \cdot \frac{L}{E}}$$

L est la distance parcourue par la charge (en cm) et E l'intensité du champ électrique (en $\text{V} \cdot \text{cm}^{-1}$), ceci indépendamment de la nature du gaz ! Ce résultat est valide aussi bien pour les ions que pour les électrons. Ainsi, une charge qui se déplace sur 10cm dans un champ de $1\text{kV} \cdot \text{cm}^{-1}$ subira une diffusion de l'ordre de $230\mu\text{m}_{\text{RMS}}$. En définitive, la largeur de la distribution est essentiellement gouvernée par la distance à parcourir et par l'intensité du champ électrique qui mène aux électrodes de mesure. En réalité, la diffusion dépend bien de la nature du gaz et le résultat évoqué ci-dessus est une limite basse valable uniquement pour les charges thermalisées. Les résultats expérimentaux sont légèrement plus élevés.

En simulation, lorsqu'on programme les équations de transport (on connaît la position à t et on cherche la position à $t + dt$), il est toujours possible d'ajouter une petite fluctuation de nature gaussienne et dont l'écart-type est donné plus haut pour avoir une description plus fine du mouvement.

La diffusion est souvent injustement accusée de dégrader la résolution spatiale des détecteurs destinés à la localisation. On pourra se reporter tout à la fin de ce document pour voir que ça n'est pas nécessairement le cas et que, correctement exploitée, elle peut même améliorer la précision de mesure...

⁵ En fait, on distingue généralement la diffusion longitudinale (le long de la trajectoire) de la diffusion transverse (dans le plan perpendiculaire à la trajectoire).

4.2.2.3 Amplification

Lorsque le champ électrique au sein du détecteur devient intense, les électrons transportés acquièrent suffisamment d'énergie pour ioniser le milieu. Lors de ces collisions, ils produisent des paires électrons/trous ou électrons/ions qui vont participer à la création du signal. Ce type de détecteur comporte donc un mécanisme d'amplification « interne » et, pour quelques électrons primaires (créés par la particule incidente), on peut récupérer plusieurs millions d'électrons secondaires.

En pratique, ce phénomène d'amplification est à la base de grandes familles de détecteurs solides comme les MPPC (Multi Pixel Photon Counters), les APD (Avalanche PhotoDiodes) ou les emccd (Electron Multiplying CCD).

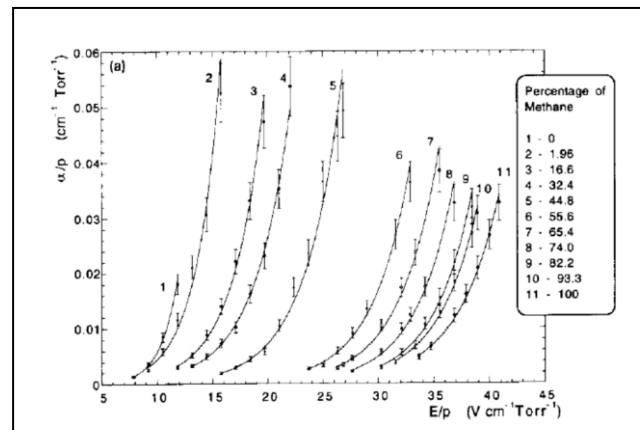
Il est bien entendu également exploité dans une multitude de familles de détecteurs gazeux tels les PC (Proportionnal Counters), les MWPC (Multi Wires Prop. Counters), les PPAC (Parallel Plate Avalanche Chambers) et plus récemment, les GEM (Gaseous Electron Multipliers). Dans les milieux gazeux, le paramètre gouvernant l'amplification est principalement le champ réduit E/P (le rapport du champ électrique à la pression de gaz⁶) qui est généralement exprimé en $V \cdot m^{-1} \cdot Torr^{-1}$. Le gain linéique, α , qui s'exprime typiquement en cm^{-1} , permet de quantifier l'amplification. Le nombre de paires créées lors d'un trajet dx vaut :

$$dN = N \cdot \alpha \cdot dx$$

Dans un champ uniforme, pour $N0$ électrons produits par une particule incidente et parcourant une distance L , on obtient donc un nombre N d'électrons :

$$N = N0 \cdot \exp(\alpha \cdot L)$$

Le gain linéique dépend bien entendu du champ électrique, de la pression de gaz, et de la nature du gaz, comme en témoigne la figure ci-contre. Elle correspond à différents mélanges d'argon et de méthane. Les réseaux de courbe de gain linéique peuvent efficacement être modélisés par une relation du type :



$$\frac{\alpha}{P} = A \cdot \exp\left(-B \cdot \frac{P}{E}\right)$$

En tout état de cause, si on ne veut pas de gain (fonctionnement en chambre d'ionisation), il faut veiller à avoir un champ réduit assez faible au sein du détecteur, typiquement inférieur à $5V \cdot cm^{-1} \cdot Torr^{-1}$. Par ailleurs, il est toujours essentiel de veiller à ce que le champ réduit, à l'extérieur du détecteur, vérifie également cette condition, ceci dans tous les cas d'exploitation. Dans le cas contraire, les effets de bord conduisent à des claquages intempestifs, rendant le détecteur inexploitable.

⁶ L'unité généralement utilisée pour exprimer la pression est le Torr. 1Torr = 1mmHg et dans les conditions normales de température, 760Torr = 1013mb.

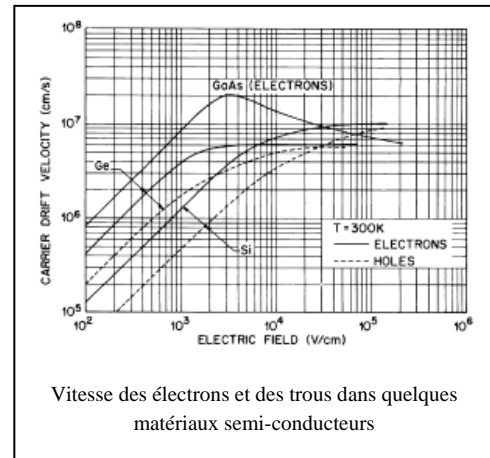
4.2.3 Electrons et trous dans les milieux solides

Nous ne nous intéresserons pas ici à la métallurgie des semi-conducteurs. Nous les considérerons seulement sous l'angle d'un matériau solide dans lequel la particule incidente a créé des paires électrons/trous qui vont voyager sous l'effet du champ électrique. Celui-ci est dérivé des équations d'électrostatique déjà mentionnées en faisant intervenir les potentiels sur les électrodes de polarisation du détecteur et, bien entendu, la charge d'espace développée par le dopage du milieu. Les trous peuvent très largement être considérés comme des charges positives dont la masse est un peu plus élevée que celle des électrons. Compte tenu de la distance interatomique, on ne s'étonnera guère que la force de frottement mentionnée précédemment agisse très efficacement sur les porteurs libres (électrons ou trous). Dès lors, l'équation de la vitesse des charges ressemble à celle des ions dans les gaz, i.e., elle est très largement proportionnelle au champ électrique à travers la mobilité :

$$\vec{v}_{e^-} = -\mu_{e^-} \cdot \vec{E}$$

$$\vec{v}_h = \mu_h \cdot \vec{E}$$

Dans les détecteurs usuels, le champ électrique typique ne dépasse guère quelques milliers de Volts par centimètres et on peut assez largement considérer la mobilité des porteurs comme ne dépendant pas du champ électrique. Cependant, elle dépend assez fortement de la température et le tableau ci-contre résume quelques caractéristiques classiques pour les matériaux de haute pureté utilisés en instrumentation nucléaire.



		Mobility (cm ² ·V ⁻¹ ·s ⁻¹)	
		300K	77K
Si	e-	1350	2.1 10 ⁴
	holes	480	1.1 10 ⁴
Ge	e-	3900	3.6 10 ⁴
	holes	1900	4.2 10 ⁴

4.3 Quelques exemples

4.3.1 Les chambres à dérive

Les chambres à dérive et leurs grandes sœurs, les chambres à projection temporelle ont deux usages. Le premier est de mesurer l'énergie déposée par une particule incidente et le second, de mesurer un point de sa trajectoire. En couplant plusieurs chambres à dérive, on peut acquérir la trajectoire complète et donc remonter au point d'interaction, ou bien à la rigidité magnétique de la particule incidente (le rapport de son impulsion à son rayon de courbure) en présence d'un champ magnétique constant. Ces informations constituent donc une part importante de l'identification de la particule incidente.

La conception et la sophistication de ce type de détecteur ne se heurte essentiellement qu'à l'imagination. On va quand même pouvoir trouver deux grandes familles d'équipements :

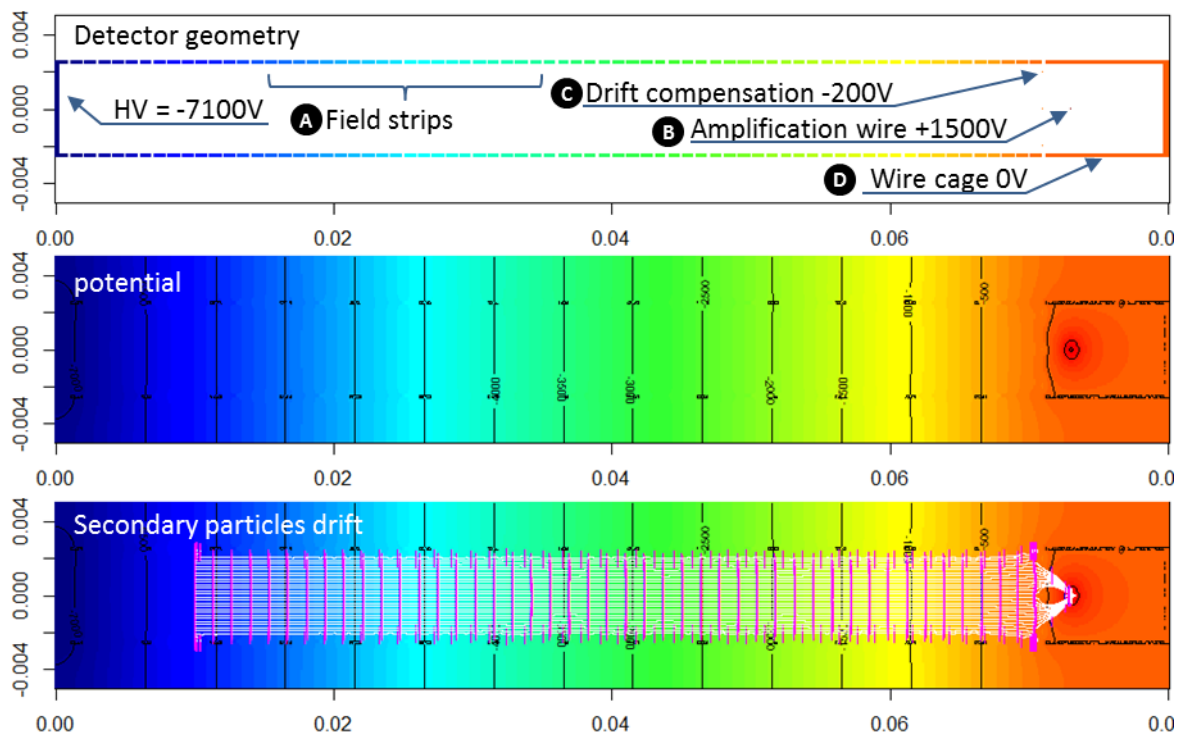
- Ceux qui sont basés sur la mesure précise du temps de dérive des charges secondaires créées dans un champ électrique le mieux contrôlé possible.

- Ceux qui privilégient la multiplicité des mesures pour parvenir à une trajectoire la plus probable possible.

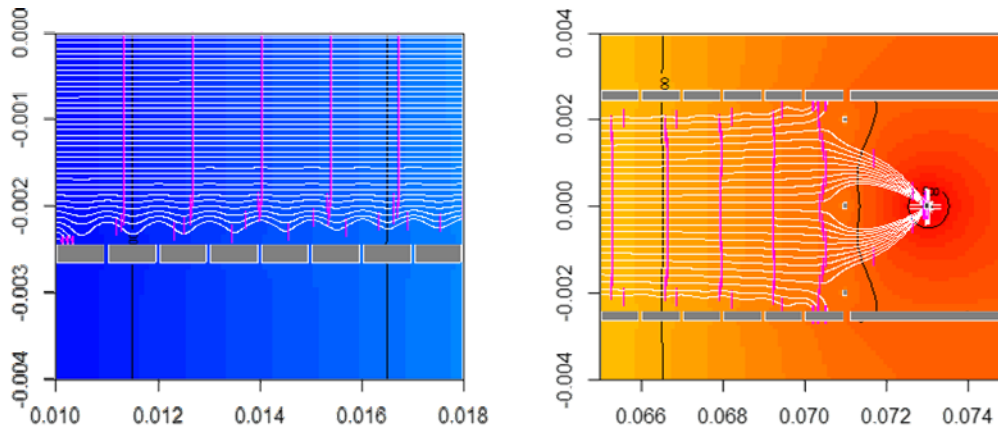
Dans la grande majorité des réalisations, les charges secondaires, plus précisément les électrons, sont transportées depuis leur lieu de création jusqu'à l'électrode de mesure et c'est le temps qu'elles mettent pour faire ce trajet qui permet de remonter à la position de la particule incidente. Généralement, l'électrode de mesure en question est un fil de faible diamètre (quelques dizaines de μm) qui « amplifie » les charges, comme nous le verrons plus loin, de façon à produire un résultat facilement exploitable.

Les chambres à dérives de précision

Un exemple de conception est illustré sur les figures suivantes. Le champ de dérive est horizontal, de la gauche vers la droite. Il est produit par un dégradeur de champ (A) constitué par des pistes de 1mm espacées de $100\mu\text{m}$, obtenues, par exemple, par évaporation d'une fine pellicule d'aluminium (quelques centaines de nanomètres) sur du mylar. Le détecteur a une épaisseur de 5mm pour une longueur de 8cm. En reliant chaque piste à sa suivante au moyen d'une résistance de forte valeur (de façon à limiter le courant de polarisation, on obtient un champ parfaitement homogène sur la quasi-intégralité du volume sensible. Le fil de mesure (B) (à l'extrême droite du schéma, quelques dizaines de micromètres de diamètre) est porté à un potentiel très positif. Le champ électrique à son voisinage est très intense, il va donc amplifier les charges qui l'atteindront. Juste devant ce fil, sont placés trois fils (C) dont le potentiel est ajusté de façon à rétablir l'isochronisme des électrons secondaires qui parviendront au fil de mesure en suivant des trajectoires différentes. Il ne s'agit pas d'une grille de Frish telle que nous la définirons plus loin. Leur rôle est parfaitement visible sur le troisième graphe qui représente les parcours d'électrons secondaires créés par une particule incidente passant à $x=1\text{cm}$. Ils obligent les électrons du milieu à les contourner, ce qui permet de rassembler des trajectoires qui sans cela auraient des longueurs différentes. Les traits verticaux magenta correspondent aux positions isochrones de chaque électron.



On retrouve ces détails sur les agrandissements ci-dessous. A gauche, on distingue les oscillations de trajectoires produites par les pistes au tout début de la dérive et à droite, le travail de rassemblement effectué par les trois fils de compensation :

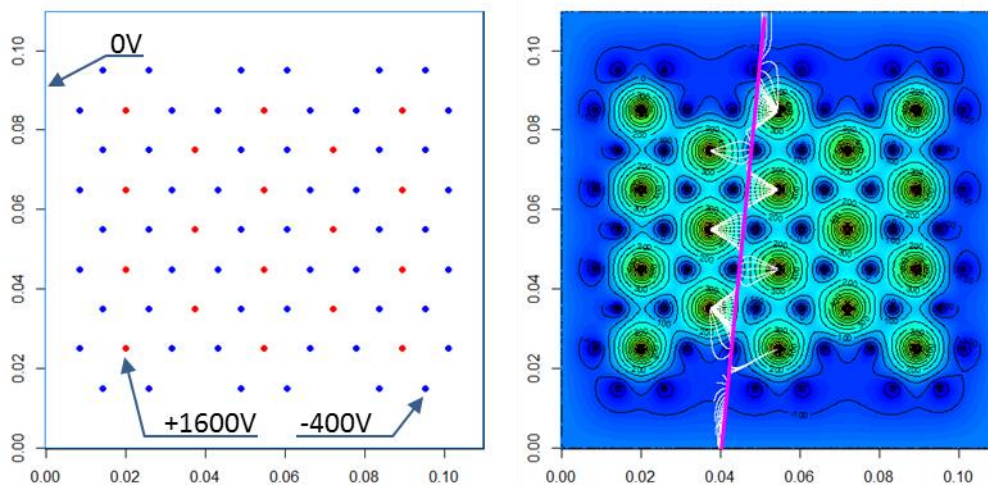


On verra plus loin que, lors de l'avalanche, les électrons, et surtout les ions qui s'éloignent du fil de mesure, induisent un signal presque aussi intense sur la cage (D) qui entoure celui-ci. Ce signal peut être mis à profit pour localiser la position de la particule incidente dans l'axe orthogonal à la dérive. On dispose, dès lors d'une chambre unique donnant les coordonnées du point d'interaction. L'une des coordonnées est obtenue par le temps de dérive, et la seconde, sur l'autre axe, par division de charges, par exemple.

Chambres à multiplicités de mesure

Plutôt que développer des stratégies sophistiquées pour éliminer le maximum de causes d'erreurs (comme dans le cas précédent), on peut délibérément choisir de développer un détecteur constitué de sous-ensembles faciles à réaliser dont on sait que chacun d'eux est incapable de donner un résultat de qualité, mais dont la combinaison va permettre d'atteindre nos objectifs.

Un tel exemple est illustré ci-dessous au moyen de compteurs proportionnels à géométrie hexagonale, empilés de façon à ce que la trajectoire de la particule incidente soit interceptée de multiples fois :



Dans cette illustration, les fils d'amplification sont portés à un potentiel de 1600V. Ils sont situés aux sommets de triangles isocèles. De façon à les isoler les uns des autres, une structure hexagonale de fils sépare les différents amplificateurs. Ces fils sont portés à un potentiel de -400V, de façon à limiter les effets de bords avec la carcasse de l'ensemble qui est à la masse. Une particule incidente, dont la trajectoire est matérialisée en magenta sur la figure de droite, va produire du signal sur sept détecteurs dans le cas représenté ici. En mesurant

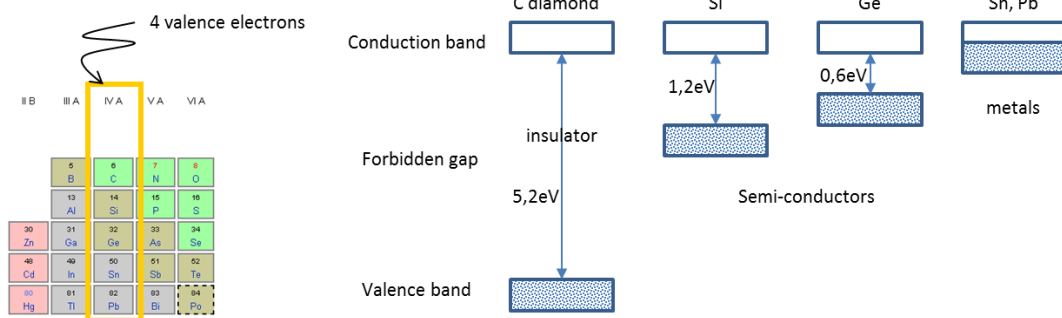
les temps de dérive des électrons secondaires, dont les trajectoires sont matérialisées en blanc, ainsi que la répartition de charges sur les compteurs touchés, on peut remonter, par calculs à la trajectoire de la particule incidente.

4.3.2 Les détecteurs solides

Il serait parfois intéressant de disposer de détecteurs solides ayant les propriétés de transport de charge des chambres à ionisation. Pour cela, il faudrait disposer de matériaux parfaitement isolants (c'est le cas du diamant, par exemple), de très haute pureté et surtout sans défauts, de façon à ce que les charges créées par les particules incidentes puissent être collectées avant d'être piégées.

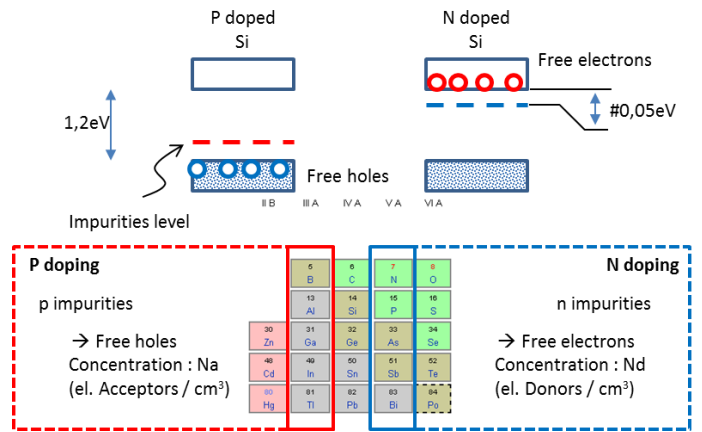
Quelques éléments sur la constitution des détecteurs solides

On va trouver de telles propriétés dans la colonne IV de la classification périodique ; elle contient, le C, le Si et le Ge ; ou bien en créant un matériau contenant simultanément des éléments à droite et à gauche de cette colonne (comme le CdTe par exemple). Les matériaux ainsi constitués constituent un cristal dont les électrons occupent la bande de valence. Ils sont donc intimement associés à leurs atomes d'origine et à leurs plus proches voisins. Il n'y a, a priori, pas de conduction électrique possible et on disposerait alors de l'équivalent d'une chambre à ionisation solide. Ceci est partiellement vrai au zéro absolu. La distance entre le haut de la bande de valence et le bas de la bande de conduction, encore appelé le gap, varie entre $0,6\text{eV}$ (Ge) et 5eV (C). Si un électron n'a pas cette énergie, il reste confiné à sa valence d'origine, mais dès qu'une particule incidente le heurte (lumière, particule chargée, etc...) et lui confère au minimum cette énergie, il peut sauter le gap et se retrouver dans la bande de conduction. On forme alors une paire électron/trou libre de se déplacer dans le cristal, et donc de produire un courant si elle est prise en charge par un champ électrique.

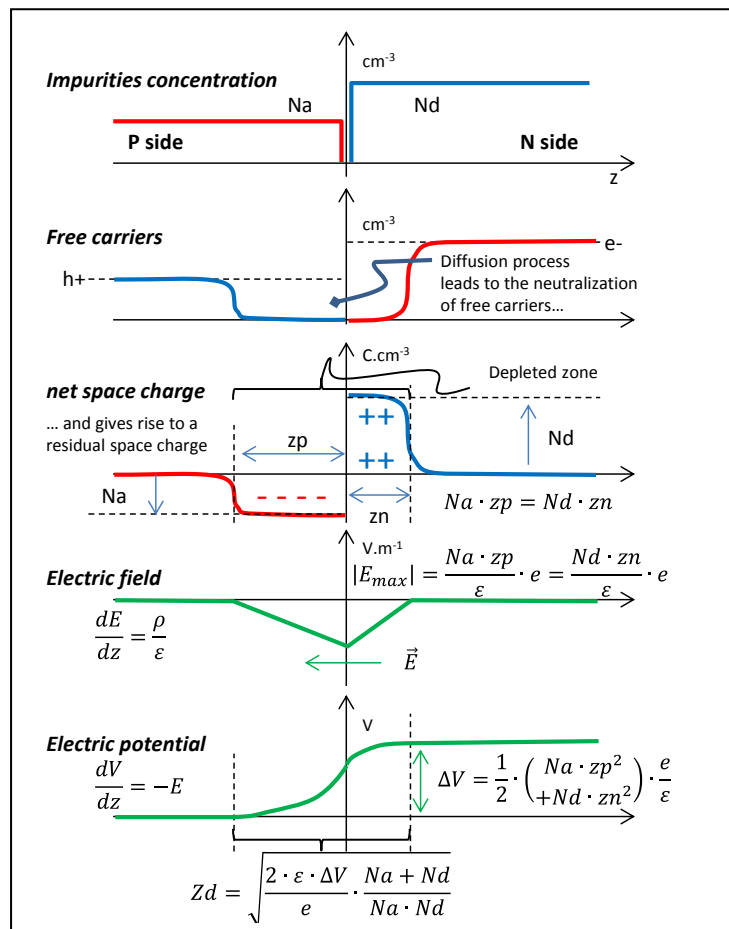


Cette structure de bande est intimement liée aux propriétés du matériau en tant que capteur. Par exemple, le gap du silicium fait $1,2\text{eV}$. Dès lors un photon qui ne dispose pas de cette énergie ne peut interagir dans le matériau par effet photoélectrique (qui produirait une paire électron/trou mesurable). La longueur d'onde correspondant à cette énergie est de l'ordre de 1030nm et les photodétecteurs silicium sont effectivement « aveugles » au-delà de cette longueur d'onde. La taille du gap gouverne également l'énergie nécessaire pour créer une paire électron/trou avec des rayonnements ionisants.

Malheureusement, on ne sait pas produire de tels matériaux parfaitement purs. Ils contiennent toujours des impuretés trivalentes -de type p- ou pentavalentes -de type n- qui vont se retrouver juste au-dessus de la bande de valence pour les premières et juste au-dessous de la bande de conduction pour les secondes. Celles-ci, sous l'effet de la température, vont s'empresse de capturer un électron (trivalentes) pour acquérir la structure du cristal et donc former un trou libre, ou libérer un électron (pentavalentes). A cette étape, on disposerait d'un matériau conducteur aux propriétés spectroscopiques désastreuses. C'est là qu'entre en jeu la jonction PN.



Si on place, au contact l'un de l'autre, un matériau de type p et un matériau de type n, les trous libérés par le premier et les électrons du second diffusent naturellement. Ils vont pouvoir se recombiner à la frontière. Au niveau de cette frontière ne vont rester que les ions trivalents qui ont capturé un électron (et donc se trouver chargés négativement) et les ions pentavalents qui ont libéré un électron (et donc se trouver chargés positivement). On a donc la production spontanée d'une charge d'espace négative d'un côté et positive de l'autre. Cette charge d'espace produit spontanément un champ électrique qui va s'opposer à la migration des charges du milieu. On voit apparaître une zone ne contenant plus de charges libres (qui auraient pu participer à une conduction électrique). On appelle cette région la zone déplétée. Elle interdit l'injection d'électrons ou de trous supplémentaires et forme un parfait isolant. C'est tout ce dont nous avons besoin pour fabriquer l'équivalent d'une chambre à ionisation.



Dès lors, en appliquant une différence de potentiel aux bornes de ces deux matériaux, on va

- Ou bien diminuer la zone de déplétion qui, quand elle finit par disparaître n'interdit plus l'injection de charges, le matériau devient alors un excellent conducteur. C'est la polarisation directe d'une diode (jonction pn). Ça ne nous intéresse pas puisque nous voulons un isolant avec le maximum de volume

d'interaction contenant un champ électrique utile à la conduction des paires créées par les rayonnements incidents.

- Ou bien augmenter la zone de déplétion. Quand cette zone s'étend sur l'ensemble du détecteur, on dit que le matériau est totalement déplété. La concentration d'impuretés totalement ionisées n'évolue plus avec la différence de potentiel et le champ électrique peut croître avec la différence de potentiel. C'est la polarisation inverse qui est recherchée pour la constitution des détecteurs.

Les détecteurs solides en pratique

Compte tenu des explications données ci-dessus, on va généralement essayer d'obtenir le champ électrique le plus abrupt possible en réalisant des jonctions qui, en fonction du matériau détecteur qu'on aura obtenu (de type n ou de type p) sont de type p+/n ou n+/p en dopant fortement l'une des faces du matériau initial. On veille également à ce que la zone fortement dopée (p+ ou n+) soit la plus fine possible pour limiter les zones mortes. Ce côté du détecteur est généralement appelé contact rectifiant, faisant référence à la diode. L'autre face du matériau est également dopée avec le même type d'impuretés que le matériau initial, de façon à réaliser un ensemble p+/n/n+ ou n+/p/p+ propre à une utilisation sous forme de détecteur. Ce côté du détecteur est appelé contact ohmique, faisant référence à la faible résistivité des couples n/n+ ou p/p+. La charge d'espace au sein du détecteur est alors essentiellement gouvernée par la concentration de donneurs (type n) ou d'accepteurs (type p) du volume sensible.

Dans le cas d'une jonction p+/n par exemple, on a $[Na] \gg [Nd]$ et l'épaisseur de la zone déplétée devient majoritairement gouvernée par la concentration de donneurs et la différence de potentiel aux bornes du détecteur :

$$z_d \sim \sqrt{\frac{2 \cdot \varepsilon \cdot \Delta V}{e \cdot Nd}}$$

La capacité équivalente du détecteur, C_d , dont nous verrons plus loin qu'elle intervient dans la résolution ultime que l'on peut atteindre est directement liée à l'épaisseur de la zone déplétée. Ainsi, pour un détecteur à électrodes parallèles de surface S , on « voit » la capacité dépendre de la tension de polarisation :

$$C_d = \varepsilon \cdot \frac{S}{z_d}$$

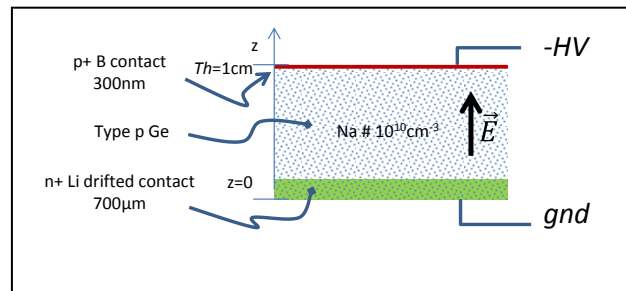
Plus cette capacité est petite, plus le bruit est faible. En polarisant progressivement le détecteur, on « voit » donc, à l'oscilloscope, le bruit diminuer (sinon, c'est qu'il y a un problème !).

Quand le détecteur est totalement déplété, i.e. que la zone de déplétion s'étend sur l'intégralité du volume sensible, la capacité n'évolue plus et le bruit reste stable. Cependant, l'intensité du champ électrique continue de croître et le signal « monte » plus vite, comme nous le verrons plus loin. Il faut bien entendu arrêter d'augmenter le potentiel avant le claquage (souvent irrémédiable) du détecteur...

Un exemple concret, le détecteur germanium en géométrie planaire

Les détecteurs germanium hyper purs sont de véritables merveilles du savoir-faire scientifique et technique des métallurgistes. Ceux-ci savent produire des lingots de matériau dont la concentration d'impuretés est de l'ordre de 10^{10} cm^{-3} avec un minimum de défauts cristallins (on se souviendra qu'un cm^3 de germanium contient quand même de l'ordre de $4,4 \cdot 10^{22}$ atomes, ça reste quand même une très belle performance).

Si on part, par exemple d'un cristal de germanium de type p, avec $Na \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$, le contact rectifiant (n+,p) sera du lithium diffusé sur typiquement $700 \mu\text{m}$ et le contact ohmique (p,p+) une implantation de bore sur 300 nm . L'épaisseur d'un tel détecteur peut sans problème dépasser le centimètre et le contact rectifiant sera généralement placé en face arrière pour limiter l'impact de la zone morte de $700 \mu\text{m}$ sur l'atténuation des rayonnements γ qu'on voudrait mesurer dans le germanium.



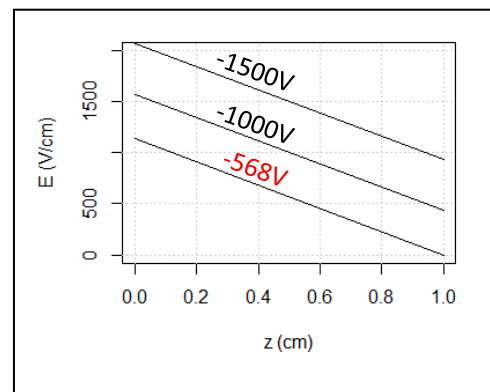
Pour calculer l'intensité du champ électrique, lorsque le détecteur est totalement déplété, on part de l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} = \frac{e \cdot Na}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0}, \text{ avec les conditions aux limites : } \begin{cases} V(z=0) = 0V \\ V(z=Th) = -HV \end{cases}$$

Puis on écrit le champ électrique :

$$E = -\frac{dV}{dz} = \frac{HV}{Th} + \frac{e \cdot Na}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Th}{2} - z\right)$$

On obtient alors la figure ci-contre. On y apprend que notre détecteur, épais de 1 cm , est totalement déplété à partir de 568 V . Ensuite, quand on augmente la tension de polarisation, l'intensité du champ électrique interne continue à croître, tout en gardant la même pente. Celle-ci est contrôlée par le taux d'impuretés qui était particulièrement faible dans ce calcul. On remarque que, pour les détecteurs épais, cette pente atténuée singulièrement le champ électrique en profondeur. Par exemple, à 1500 V , le champ en face arrière ($z=0$) est deux fois plus intense que le champ en face avant. C'est la raison pour laquelle on cherche des matériaux les plus purs possibles pour constituer les détecteurs épais.



5 Formation du signal

A présent que nous savons où sont créées les charges secondaires (produites par les particules incidentes) et comment elles sont transportées par le champ électrique de notre détecteur, nous allons pouvoir nous attaquer à une question fondamentale : comment est induit le signal sur les électrodes de mesure de notre équipement ?

Le théorème de Ramo-Shokley est au cœur du processus de modélisation de la formation du signal. Nous commencerons par l'expliquer. Nous verrons ensuite la démarche permettant de l'exploiter concrètement puis nous en dériverons quelques conséquences importantes.

5.1 Le théorème de Ramo-Shokley

Nous en venons maintenant au cœur du problème. On sait calculer le champ électrique et transporter les charges produites par une particule incidente au sein du détecteur. Reste à expliciter comment ces charges produisent un signal sur les électrodes du détecteur⁷. Pour cela, il suffit de faire appel au théorème de Ramo-Shockley qui s'énonce comme suit :

- Soit un ensemble d'électrodes (i) portées à des potentiels parfaitement fixes V_i .
- Soit une particule de charge q dont on connaît le mouvement $\vec{M}(t)$, donc la vitesse $\vec{v}(t)$.
- Alors, le mouvement de la particule induit un courant $i(t)$ injecté sur l'électrode k . Ce générateur de courant vaut :

$$i(t) = -q \cdot \vec{v}(t) \cdot \frac{\vec{E}^*}{1V}$$

Où \vec{E}^* est le champ électrique virtuel qui existerait si :

- on plaçait l'électrode k au potentiel $1V$ ⁸,
- toutes les autres électrodes étant à la masse ($0V$),
- et on enlevait toutes les charges présentes dans le détecteur⁹.

Le résultat semble un peu ardu, mais il n'en est rien. Avec un peu d'expérience, son usage est d'une rare élégance. Découlant des équations de Maxwell, il est bien entendu valable dans tous les cas de figures imaginables. On remarque en premier lieu qu'une particule n'induit du signal QUE pendant son mouvement dans le milieu du détecteur. Lorsqu'elle est collectée sur une électrode, sa vitesse s'annule et elle ne produit plus de signal. On constate également qu'il n'est pas nécessaire que la particule touche l'électrode k pour induire du

⁷ Une approche naïve consiste à dire que le signal est induit par l'arrivée physique des charges sur une électrode. C'est très précisément ce qui était « pensé » jusqu'à ce que Ramo d'une part et Shockley d'autre part démontrent le mécanisme exact dans le théorème qui porte leur nom. Celui-ci émane purement et simplement des équations de Maxwell et on peut le démontrer en quelques pages de calcul. On consultera avec bénéfice l'article original de Ramo pour y trouver une démonstration élégante.

⁸ Le $1V$ n'a rien de « magique ». On peut mettre le potentiel qu'on veut, du moment qu'on le reporte dans la formule du courant où, accessoirement, il n'apparaît que pour des questions d'homogénéité.

⁹ Très important, en particulier pour les détecteurs solides ! Ne pas oublier d'enlever la charge d'espace liée au dopage.

signal sur cette électrode. En pratique, une particule chargée en mouvement induit du signal sur toutes les électrodes du détecteur...

Le théorème de Ramo-Shockley s'étend par simple sommation à un ensemble de particules en mouvement (il s'agit simplement du théorème de superposition en électronique).

5.2 La recette de cuisine

Pour exploiter pleinement le théorème de Ramo-Shockley, il suffit donc :

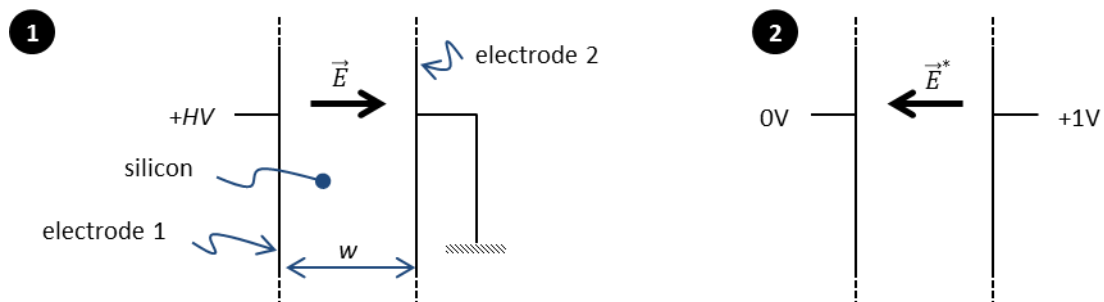
1. De calculer le champ électrique \vec{E} qui existe dans le détecteur réel, les électrodes étant alimentées à leur potentiel nominal, sans oublier la charge d'espace qui peut exister (par exemple dans les détecteurs solides).
2. On en profite pour calculer le champ virtuel \vec{E}^* comme mentionné ci-dessus.
3. On propage les particules chargées en calculant leur trajectoire dans le champ électrique réel \vec{E} .
4. On calcule le générateur de courant résultant en utilisant cette fois le champ virtuel \vec{E}^* , pour les charges négatives et les charges positives.

Quelques exemples concrets de cette de cette démarche sont explicités dans le chapitre suivant.

5.3 Quelques exemples et conséquences du théorème de Ramo-Shockley

5.3.1 Une paire électron-trou dans un détecteur plan

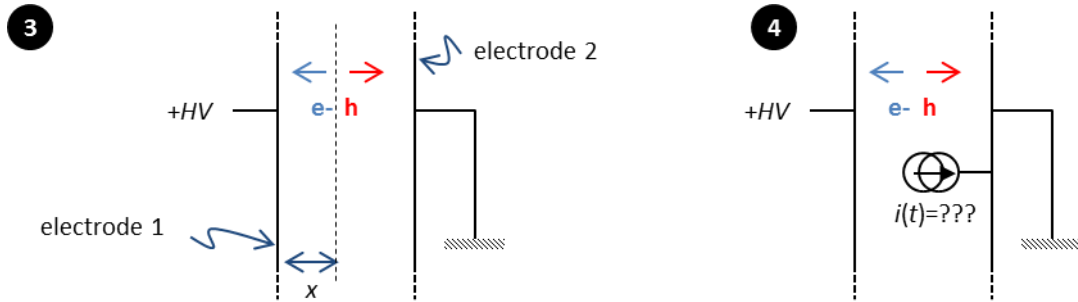
L'exemple le plus simple qu'on puisse imaginer consiste à regarder ce qu'il se passe pour une paire électron-trou créée à une position donnée d'un détecteur plan infini de type PIN (P, Intrinsèque, N : pas de charge d'espace au sein du détecteur) à température ambiante. On veut calculer le courant injecté dans l'électrode (2). On prendra $HV=100V$, $w=500\mu m$.



Les étapes ❶ et ❷ consistent à calculer le champ électrique réel et le champ virtuel :

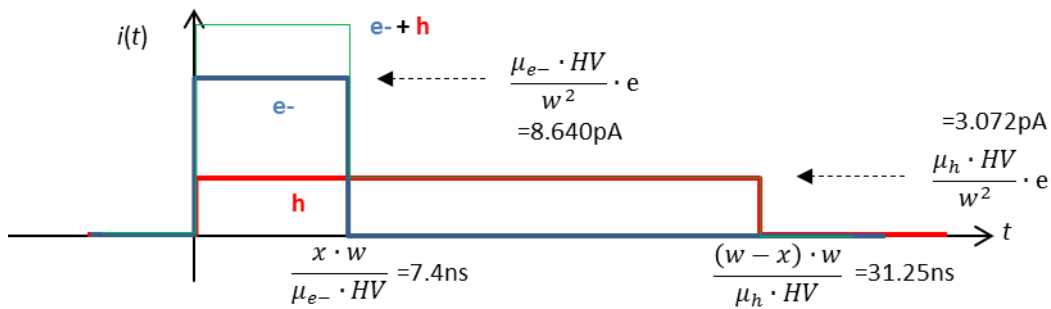
- (1) Le champ électrique va dans le sens des potentiels décroissants (gauche à droite). Il est uniforme dans tout le volume du détecteur et son intensité vaut $|E| = HV/w$.
- (2) Pour le champ virtuel, on place l'électrode de mesure (2) à 1V et les autres (1) à 0V. Le champ virtuel est donc dirigé de la droite vers la gauche et son intensité vaut $|E^*| = 1V/w$.

On place maintenant une paire e-/h à la position x (=200µm, référencée par rapport à l'électrode 1). L'électron va aller vers l'électrode 1 et le trou vers l'électrode 2. Dans l'étape ③ on calcule la trajectoire de l'électron et du trou et dans la ④ on rassemble le tout pour calculer le générateur de courant.



- (3) L'électron se déplace à la vitesse $\vec{v}_{e^-} = -\mu_{e^-} \cdot \vec{E}$, soit $|\vec{v}_{e^-}| = \mu_{e^-} \cdot HV/w = 2.7\text{cm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$. Le champ électrique étant constant, sa vitesse est constante. Il va donc mettre un temps $t_{e^-} = x \cdot w / \mu_{e^-} \cdot HV = 7.4\text{ns}$ pour atteindre l'électrode 1.
- Le trou se déplace à la vitesse $|\vec{v}_{e^+}| = \mu_{e^+} \cdot HV/w = 0.96\text{cm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$ et il met un temps $t_h = (w - x) \cdot w / \mu_h \cdot HV = 31.25\text{ns}$ pour atteindre l'électrode 2.
- (4) L'intensité du générateur de courant se décompose comme suit :
 l'électron participe au courant $i_{e^-}(t) = -(-e) \cdot (+1) \cdot (\mu_{e^-} \cdot HV/w) \cdot (1/w) = 8.640\text{pA}$ pendant la durée t_{e^-} ,
 et le trou : $i_h(t) = -(+e) \cdot (-1) \cdot (\mu_h \cdot HV/w) \cdot (1/w) = 3.072\text{pA}$ pendant la durée t_h .

On peut enfin rassembler tout ce travail sur le graphe suivant qui exprime la forme du générateur de courant calculé plus haut :



On dispose maintenant d'une description fine de la forme du générateur de courant. Plusieurs remarques importantes peuvent à présent être faites :

En premier lieu, une trivialité : on dispose de données quantitatives sur le signal, aussi bien sur son amplitude que sur sa forme. On ne subit plus de détecteur, on maîtrise son fonctionnement. On pourra donc, au besoin, optimiser ses performances au regard de tel ou tel critère.

Comme promis, l'électron, qui ne va jamais sur l'électrode de mesure, participe quand même au signal. C'est même lui qui a la plus grande contribution (en terme d'intensité). C'est lié à sa vitesse qui est plus grande que celle du trou.

L'intensité du courant porté par l'électron et par le trou ne dépend que de la géométrie du détecteur, pas de l'endroit où a été créée la paire.

La forme du signal, par contre, dépend bien de l'endroit où a été créée la paire. Cette situation correspond assez précisément à ce qu'il se passe dans les gros spectromètres silicium ou germanium (planaires ou coaxiaux). On dispose ici d'un moyen intéressant pour mesurer la « profondeur » de l'interaction de photons, par exemple.

Si on calcule les charges totales développées par l'électron et le trou, on trouve :

$$Q_{e^-} = \frac{x}{w} \cdot e \quad \text{et} \quad Q_h = \frac{w-x}{w} \cdot e \quad \text{et on vérifie que} \quad Q_{tot} = Q_{e^-} + Q_{e^+} = e$$

La charge est conservée : on a créé *une paire électron/trou* et si on mesure la charge totale délivrée par le générateur de courant sur une électrode, on récupère *une charge*. On comprend donc qu'un spectromètre du type évoqué ci-dessus va être un redoutable équipement pour mesurer la charge totale déposée par une particule dans le détecteur.

La propriété qui vient d'être évoquée est un « produit dérivé » fort utile du théorème de Ramo-Shockley. Si on s'intéresse à la charge totale délivrée par son générateur de courant, on obtient :

$$Q_{tot} = -q \cdot \int_0^\infty \frac{d\vec{M}}{dt} \cdot \frac{\vec{E}^*}{1V} \cdot dt \quad \text{et en remarquant que} \quad d\vec{M} \cdot \vec{E}^* = -dV^*, \quad \text{on peut simplifier l'expression en}$$

$$Q_{tot} = q \cdot \int_{V^*(0)}^{V^*(\infty)} \frac{1}{1V} \cdot dV = q \cdot \frac{V^*(\infty) - V^*(0)}{1V}$$

Où $V^*(0)$ est le potentiel (virtuel) à l'endroit d'où est partie la charge et $V^*(\infty)$ celui où elle arrive. Par exemple, dans le cas évoqué ci-dessus, pour l'électron partant de x , le potentiel virtuel de départ était $x/w \cdot 1V$ et le potentiel d'arrivée était $0V$. Dans le cas général, pour une paire $+e/-e$ créée à en endroit quelconque, on a :

$$Q_{tot} = +e \cdot \frac{V_{+e}^*(\infty) - V_{+e}^*(0)}{1V} - e \cdot \frac{V_{-e}^*(\infty) - V_{-e}^*(0)}{1V} = e \cdot \frac{V_{+e}^*(\infty) - V_{-e}^*(\infty)}{1V}$$

Ainsi, si la charge positive (resp. négative) est collectée sur l'électrode de mesure de potentiel virtuel = $1V$, la charge négative (resp. positive) arrive (souvent¹⁰) sur une autre électrode nécessairement de potentiel virtuel = $0V$. Par conséquent, la charge totale mesurée est égale à $+e$ (resp. $-e$).

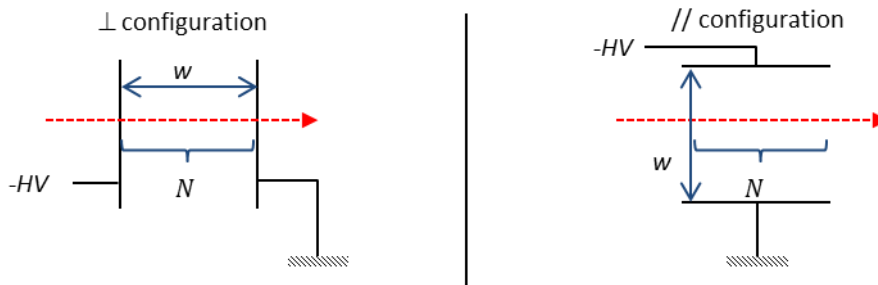
5.3.2 Où la façon de traverser un détecteur présente quelque importance

Nous allons maintenant explorer une application amusante du théorème de Ramo-Shockley qui va permettre d'illustrer tout son intérêt. Nous voulons mesurer l'énergie déposée par une particule traversant un détecteur gazeux, par exemple une chambre d'ionisation. Nous allons examiner deux configurations : faisceau orthogonal aux électrodes, « \perp » à gauche et faisceau parallèle aux électrodes, « \parallel » à droite. La particule incidente (trajectoire en rouge) dépose la même énergie dans les deux détecteurs sous la forme de N paires électrons/ions. Les chambres sont polarisées au moyen d'une haute-tension négative (pour changer un peu) de valeur $-HV$. Les deux détecteurs ont les mêmes dimensions.

¹⁰ On voit ici qu'il faut toujours s'assurer que TOUTES les charges finissent par parvenir à une électrode du système (ou partent à l'infini, à la rigueur). Dans le cas contraire, il faut s'attendre à quelques petits problèmes...

0

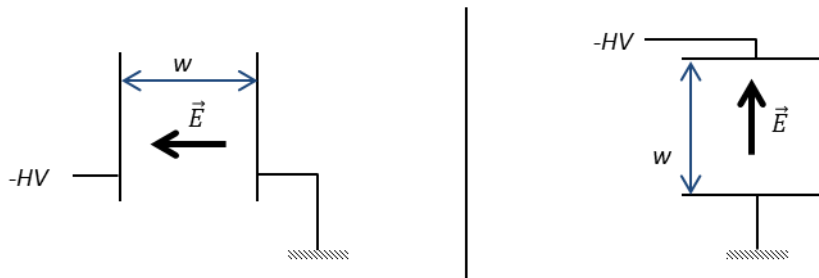
The tricks of signal induction...



L'étape ❶ consiste à calculer le champ électrique existant dans le détecteur :

1

Electric fields in the detectors

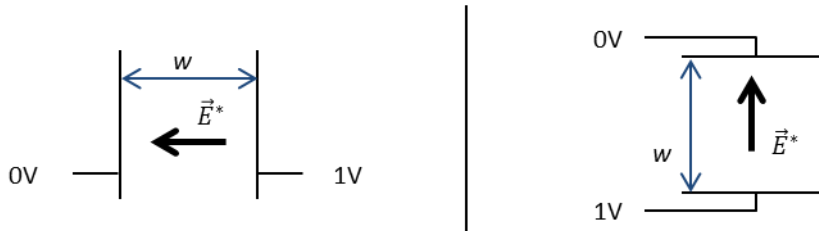


Dans les deux cas, l'intensité du champ électrique vaut $E = HV/w$.

Puis il faut choisir notre électrode de mesure. Nous prendrons celle qui est directement reliée à la masse pour calculer le champ virtuel :

2

Virtual fields in the detectors



Dans les deux cas, l'intensité du champ électrique virtuel vaut $E^* = 1V/w$.

A partir de maintenant, les choses vont se passer un peu différemment. En effet, si toutes les charges (électrons ou ions) subissent la même intensité de champ électrique, et vont donc à la même vitesse, $v_{e^-} = \mu_{e^-} \cdot E$ et $v_{ions} = \mu_{ions} \cdot E$:

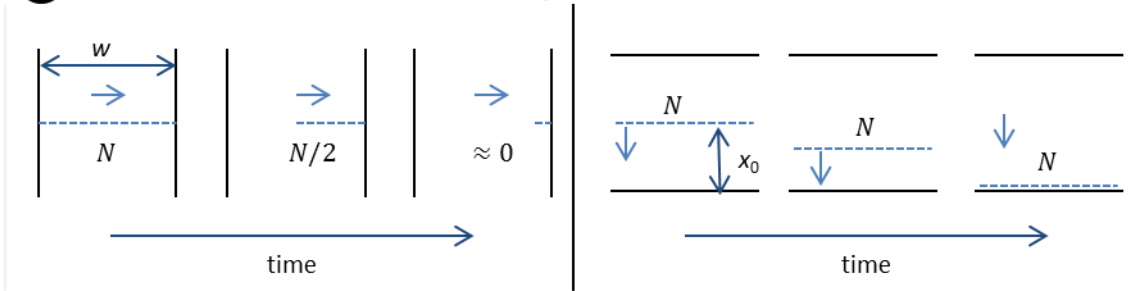
dans la configuration \perp , les électrons sont collectés au bout d'un temps $t = x/v_{e^-}$ où x est la distance à parcourir, mesurée depuis l'électrode à la masse (variable le long de la trajectoire de la particule incidente, de 0 à w).

dans la configuration \parallel , les N électrons se déplacent, tels un seul homme, vers l'électrode de mesure. Ils mettent tous un temps $t = x_0/v_{e^-}$ pour parvenir à l'électrode de mesure où x_0 est la position de la particule incidente mesurée depuis l'électrode à la masse.

Tout cela est représenté sur la figure suivante, correspondant à l'étape ❸ :

3

Electrons transport in the detectors



On laisse ici le lecteur déterminer ce qu'il advient des ions... On peut donc passer à l'étape 4, à savoir le calcul des générateurs de courant injectés dans les électrodes de mesure :

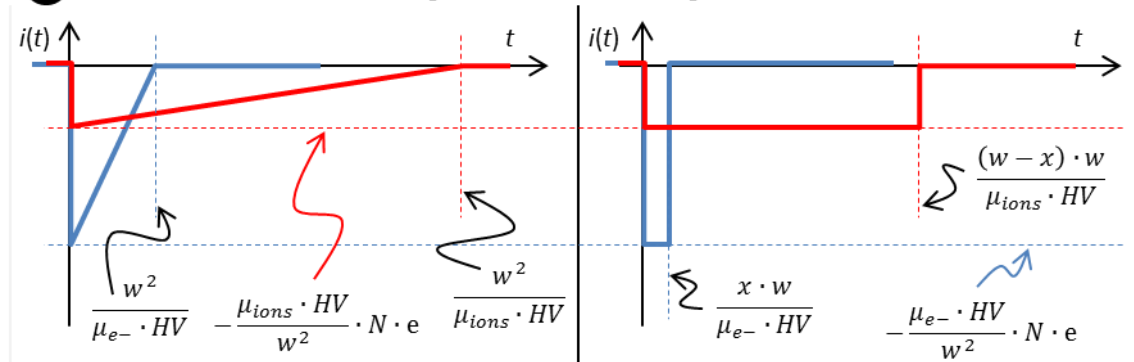
dans la configuration \perp , on ne s'étonnera pas de voir apparaître des signaux triangulaires (collection progressive des charges, linéaire avec le temps). A $t = 0$, les N électrons se déplacent. Ils disparaissent progressivement et le signal s'évanouit lorsque l'électron qui a la plus grande distance à parcourir (w) est collecté, i.e. à $t = w/v_{e-}$. On tient exactement le même raisonnement pour les ions.

dans la configuration \parallel , on retrouve mot pour mot le raisonnement du premier exemple ci-dessus à un détail près, cette fois-ci, ce sont N électrons ou ions qui se déplacent simultanément. Le générateur de courant est donc N fois plus intense.

Toutes ces considérations conduisent aux graphes suivants¹¹ :

4

Current generators in the sensing electrodes



Étonnant, n'est-ce pas ? On peut à présent tirer quelques conclusions ou faire quelques remarques fort utiles.

Notons déjà que, quelle que soit la configuration, la charge totale (portée par les électrons et les ions) est toujours bien égale à $N \cdot e$, comme il se doit. Le distinguo s'opère uniquement sur la durée des impulsions. Dans la configuration \perp , les signaux ont toujours la même forme alors que dans la configuration \parallel , ceux-ci (leur largeur) dépendent de la position d'entrée de la particule incidente.

Cela peut sembler anecdotique, mais il n'en n'est rien. En effet, les ions sont approximativement 2000 fois plus lents que les électrons et leur mesure nécessite des temps se chiffrant en centaines de microsecondes. Cela n'est pas compatible avec l'usage d'un tel détecteur ou tout du moins limiterait drastiquement le taux de comptage admissible. Dès lors, on place derrière les détecteurs gazeux, des circuits électroniques qui éliminent

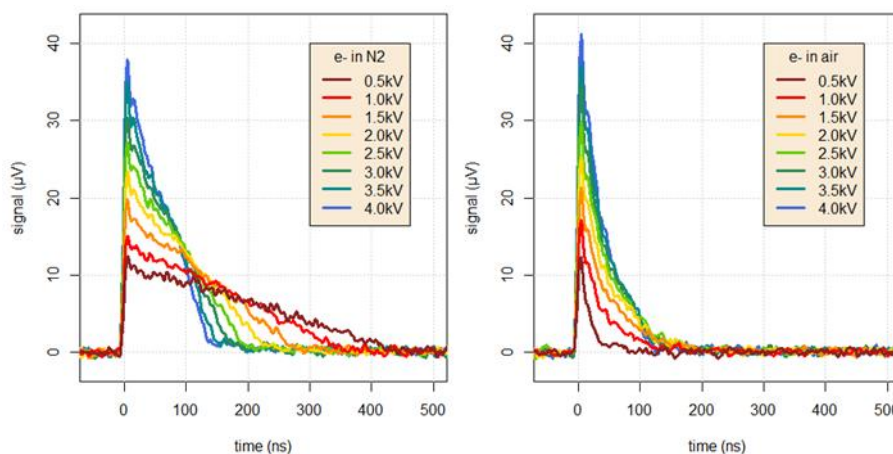
¹¹ Attention : la mobilité des ions est 2000 fois plus faible que celle des électrons, les courbes rouges (ions) et bleues (électrons) ne sont pas du tout à la même échelle...

(au moins très largement) la composante ionique du signal. La conséquence immédiate sur la charge « électronique » est la suivante :

- Avec la configuration \perp , on mesure toujours $\frac{1}{2} \cdot N \cdot e$. C'est bien, mais on a perdu la moitié de la charge.
- Avec la configuration $//$, on mesure $\frac{x}{w} \cdot N \cdot e$, c'est-à-dire un signal dépendant à la fois de la charge déposée et de l'endroit où est passée la particule incidente... Pas très pratique.

On aimerait bien, cependant, mesurer avec les seuls électrons, un signal égal à la charge totale déposée et ne dépendant pas de la position de la particule incidente. En utilisant correctement le « couteau Suisse » de l'instrumentation qu'est le théorème de Ramo-Shockley, on va trouver une solution (enfin, plus exactement, c'est O. Frisch qui l'a trouvée...).

Confrontons d'abord la théorie à la pratique. Les figures suivantes correspondent à la traversée de particules α dans un détecteur gazeux (en configuration \perp , épaisseur 5mm). Le signal est mesuré à travers une résistance de 50 Ω (diviser par 50 pour avoir le courant en A). A gauche, les électrons dans l'azote, à droite, dans l'air. Le signal « ionique » n'est pas visible (trop faible), le tout pour des hautes tensions de 500V à 4kV.

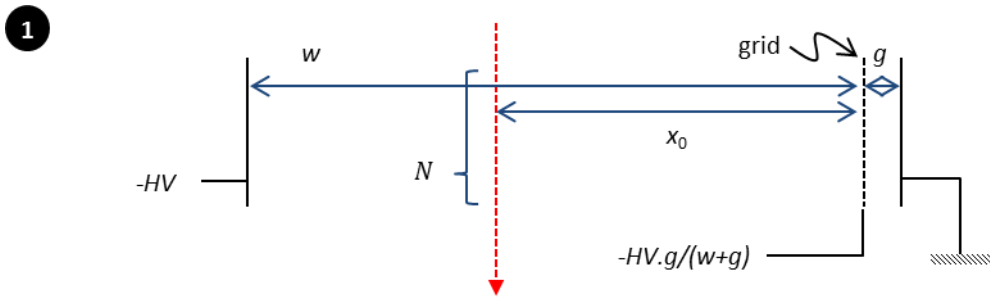


On voit très bien la forme triangulaire quasi parfaite pour les électrons dans l'azote, conformément au théorème de Ramo-Shockley. Dans l'air, ça n'est plus le cas... A $t=0$, les signaux ont approximativement la même amplitude (il y a en effet le même dépôt d'énergie dans N2 que dans l'air), par contre, dans l'air, les électrons sont progressivement capturés par l'oxygène pour former des ions (plus lents). C'est la capture électronique et sa dépendance au champ électrique qu'on mesure ici.

5.3.3 Une ruse de sioux, la grille de Frisch

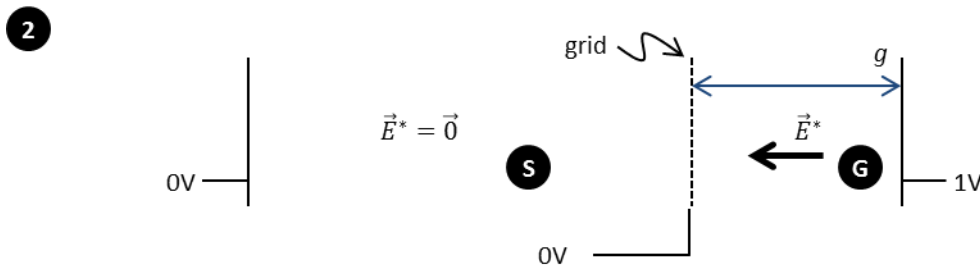
La grille de Frisch est un très bel exemple d'utilisation fonctionnelle du théorème de Ramo-shockley, dans le but de concevoir un détecteur qui ne présenterait pas les défauts mentionnés ci-dessus. Dans ses grandes lignes, l'idée est la suivante : on dispose d'un détecteur dans la configuration $//$, ce qui est a priori une mauvaise idée, mais... on dispose à quelques millimètres de l'électrode de mesure, une grille « transparente » (ou une série de fils) placée au potentiel qui existerait si la grille n'était pas là. Par « transparente », on entend qu'elle laisse passer les charges (comme si elle n'était pas là). Si, par exemple, on réalisait un détecteur de 10cm et que la

grille se situe à 5mm de l'électrode de mesure (à la masse), il faudrait la polariser à quelque-chose comme $0.5/10=0.05$ x la tension de polarisation¹². On obtiendrait alors le schéma suivant :



Le champ électrique est uniforme dans tout le détecteur et la grille ne change rien à cet aspect (puisque'elle est au potentiel qui existerait si elle n'était pas là !). Il est dirigé de gauche à droite et son intensité vaut $E = HV/(w + g)$.

Toute la subtilité réside dans la phase ②. L'électrode à la masse (électrode de mesure) est placée à 1V, l'électrode de haute-tension, à 0V, et la grille aussi est placée à 0V, donnant approximativement le schéma de champ virtuel suivant (la géométrie a été modifiée pour en faciliter la lecture) :



La zone sensible (S) est entourée d'électrodes au potentiel nul, le champ virtuel est donc nul, alors que la zone (G) est entourée d'un côté de la grille (0V) et de l'autre de l'électrode de mesure (1V) ; le champ virtuel qui y règne a donc pour intensité $E^* = 1V/g$.

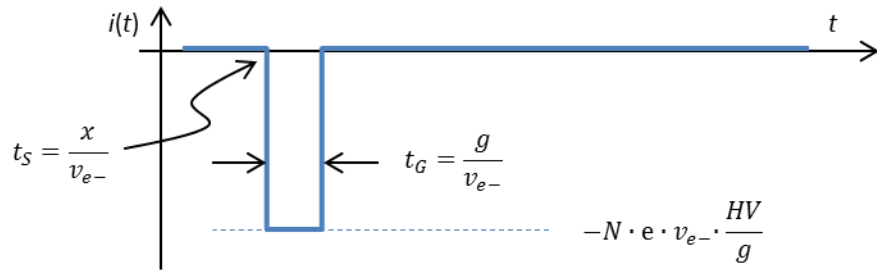
L'étape ③ est triviale, tous les électrons se déplacent dans un bel ensemble dans la zone (S) puis à travers la zone (G) à la même vitesse $v_{e-} = \mu_{e-} \cdot E = \mu_{e-} \cdot HV/(w + g)$. Ils mettent un temps $t_S = x/v_{e-}$ pour parvenir à la grille et un temps $t_G = g/v_{e-}$ pour faire le trajet grille→électrode.

On calcule le générateur résultant à l'étape ④ :

- les charges dans la zone (S) n'induisent aucun signal (c'est valable aussi bien pour les électrons que pour les ions) puisque le champ virtuel y est nul. Il n'y a donc pas de signal pendant le temps t_S .
- Lorsqu'ils pénètrent dans la zone (G), les électrons se meuvent toujours ensemble. Ils sont au nombre de N et vont à la vitesse v_{e-} pendant le temps t_G dans le champ virtuel calculé ci-dessus. Ils induisent donc un courant négatif :

¹² En réalité, une grille parfaitement transparente n'existe pas. Pour contourner ce problème, il faut réaliser des simulations fines en jouant sur le potentiel de la grille (et sa géométrie), de façon à ce que les charges incidentes contournent celle-ci.

4

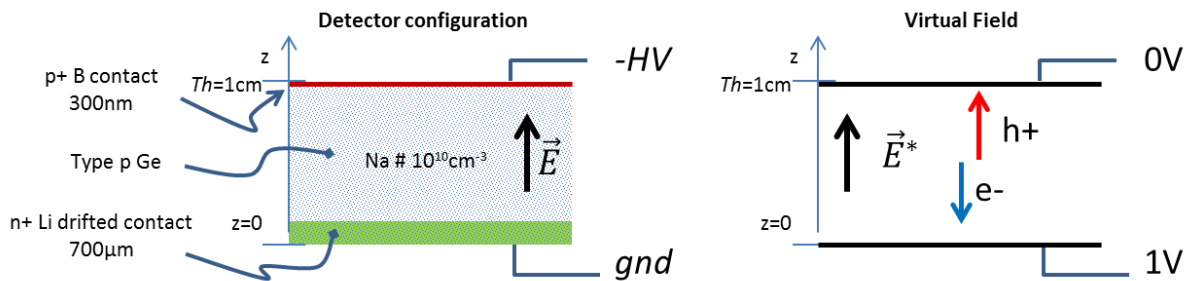


Ainsi :

- Le signal ne provient que des électrons, il est donc rapide.
- Tous les signaux ont la même forme (rectangulaire), ceci quelle que soit la position d'entrée de la particule incidente.
- La charge totale est à nouveau égale à $N \cdot e$.
- On a juste un retard pur sur la formation du signal par rapport à l'instant de passage de la particule incidente, ce qui n'est pas fondamentalement grave et peut même être mis à profit pour « localiser » celle-ci.

5.3.4 Un détecteur solide : le germanium en géométrie planeaire

Nous avons calculé, plus haut, le champ électrique présent dans un détecteur germanium hyper-pur (voir §3.1.1). Nous pouvons à présent compléter ce résultat en y incluant le mouvement des porteurs, et donc prédire très précisément la forme des signaux que nous observerions sur ce genre d'équipement. Il ne nous manque que le champ virtuel qui, dans ce cas précis est très simple :



$$E = \frac{HV}{Th} + \frac{e \cdot Na}{\epsilon_r \cdot \epsilon_0} \cdot \left(\frac{Th}{2} - z \right)$$

$$E^* = \frac{1V}{Th}$$

Il nous faut ensuite exprimer le mouvement des électrons (e-) et des trous (h+) dans le système de coordonnées choisi :

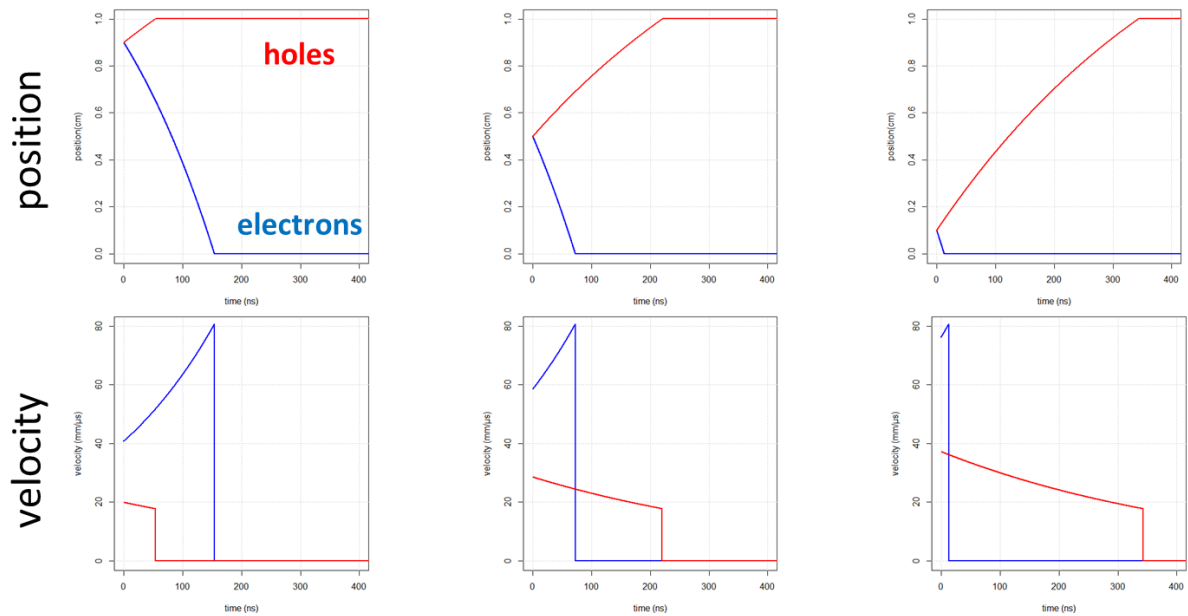
$$v_e = -\mu_e \cdot E$$

$$v_h = \mu_h \cdot E$$

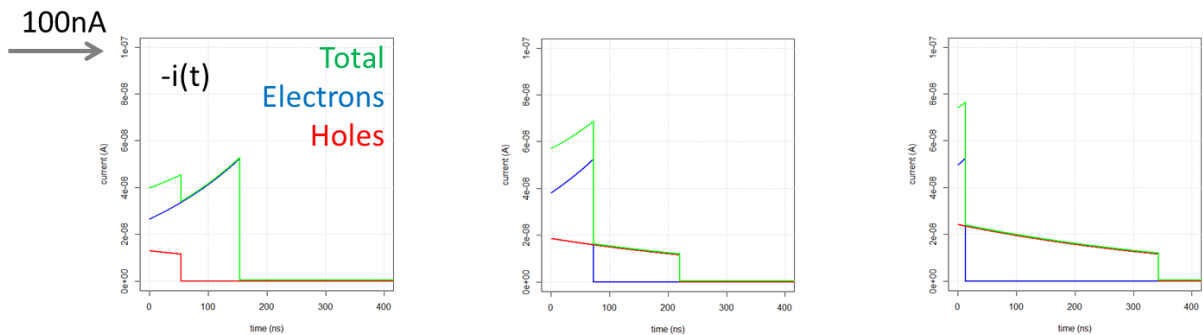
puis, transporter les charges en fonction de leur position initiale. Il faut donc intégrer l'équation du mouvement. Cela peut rapidement devenir un problème assez délicat, par exemple dans les champs électriques complexes, ou quand la mobilité n'est pas constante. Dans ces cas précis, on peut se contenter d'une intégration numérique simple, par exemple :

$$M(t + dt) = M(t) + v(M(t)) \cdot dt$$

En prenant un pas temporel dt suffisamment petit, typiquement très inférieur à la nanoseconde dans le cas présent, on obtient un résultat tout à fait convainquant. Les figures suivantes exposent les positions et les vitesses de charges créées à différentes profondeurs dans le détecteur :

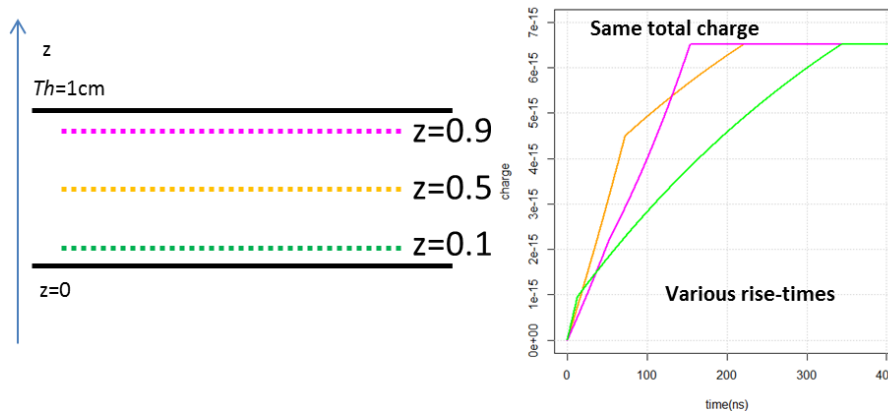


Si on considère qu'un γ de 122keV (par exemple) interagit à une profondeur z donnée et dépose toute son énergie à cet endroit, on va récupérer approximativement 41000 paires électrons/trous. Il ne nous reste plus qu'à utiliser le formalisme du théorème de Ramo-Shockley pour obtenir le courant qu'on mesurerait (en vert le courant total) :



On constate que la forme des générateur dépend fortement du lieu d'interaction, à la fois en termes d'intensité crête qu'en termes de durée totale. Comme à l'habitude, le temps de montée du signal en courant est nul (les charges induisent le courant dès l'instant où elles se mettent en mouvement).

On peut également calculer la charge totale mesurée et on obtient la figure suivante :



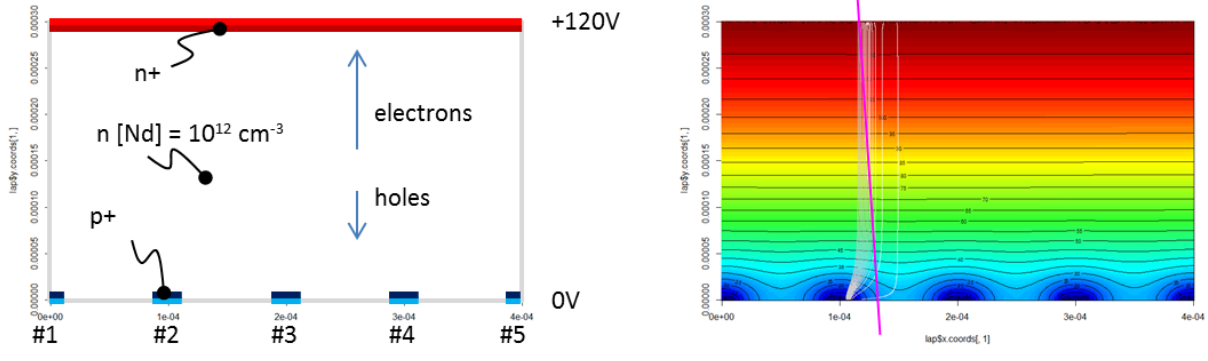
La charge totale mesurée ne dépend bien entendu pas de la position d'interaction. Par contre, le temps de montée du signal en charge en dépend (ici 150ns pour une interaction au milieu du détecteur pour 300ns en face arrière). Nous verrons plus loin que ce comportement peut être très préjudiciable à la qualité spectroscopique, si on n'y prête pas attention...

5.3.5 Les détecteurs à pistes

Les détecteurs à pistes sont couramment utilisés en instrumentation nucléaire pour simultanément mesurer le dépôt d'énergie d'une particule et un point de sa trajectoire. Nous allons voir, en exploitant le théorème de Ramo-Shockley, qu'ils sont le siège de phénomènes parfois déroutants qu'il vaut mieux connaître si on veut correctement exploiter les informations qu'ils délivrent.

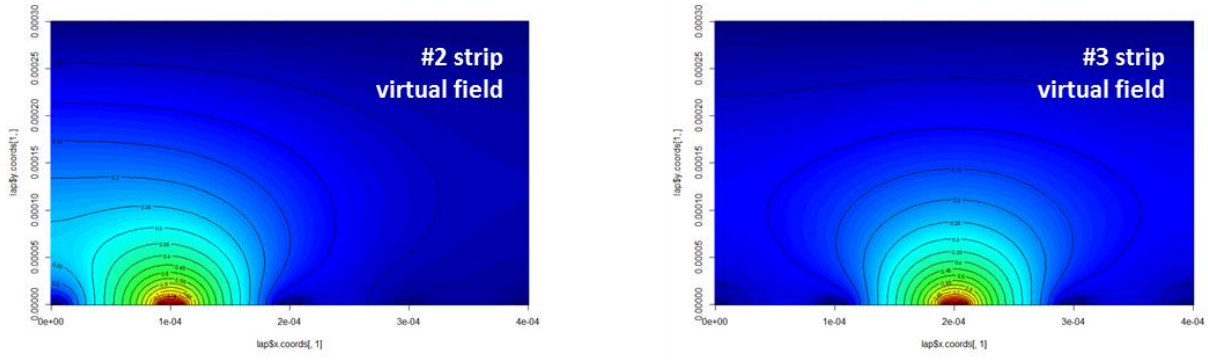
Il n'est plus possible ici de se contenter d'un calcul à une dimension et il devient nécessaire d'utiliser des techniques un peu plus sophistiquées pour résoudre l'équation de Laplace. On se contentera ici d'une méthode aux différences finies dans laquelle on définit le potentiel sur une grille uniforme. On connaît a priori la charge d'espace en tous points et les conditions aux limites (potentiel sur les électrodes). C'est assez approximatif (en particulier concernant la charge d'espace localisée sur les pistes), mais cela va nous permettre d'illustrer le phénomène de crosstalk transitoire qui affecte ces détecteurs. Nous supposons également que la mobilité des porteurs (électrons et trous) est indépendante du champ électrique. Cette illustration n'aura donc qu'un sens pédagogique et il ne faudra pas chercher à interpréter finement les temps caractéristiques issus de ces calculs. Cependant, les formes d'impulsions auxquelles nous allons parvenir vont être relativement conformes à la réalité, ce qui sera bien suffisant pour cet exemple.

Le détecteur (son dopage et sa charge d'espace) sont illustrés sur la figure de gauche. Le potentiel en son volume est sur la figure de droite. On y trouve également la trajectoire d'une particule incidente (en magenta) et les trajectoires de quelques paires électrons/trous, respectivement en blanc et gris.

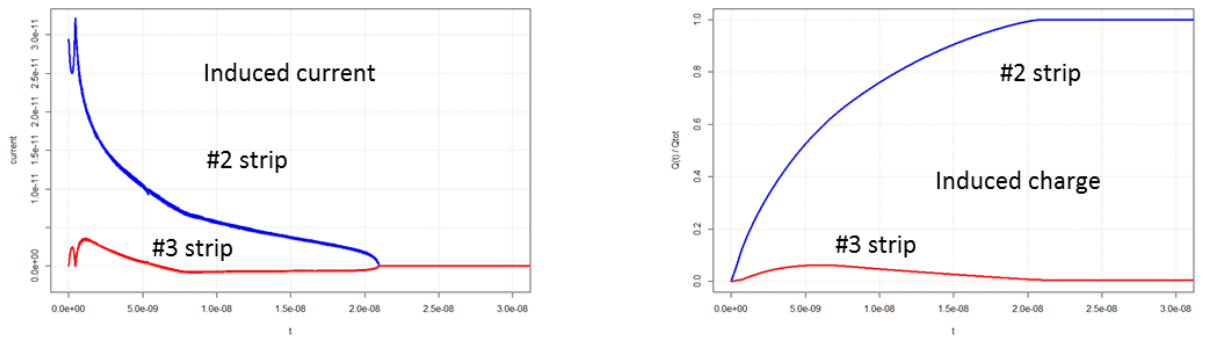


Le champ électrique est quasiment uniforme dans le détecteur mais se concentre autour des pistes (grâce à la charge d'espace), permettant de guider les trous vers celle-ci.

Observons à présent ce qu'il se passe sur la piste #2 qui reçoit les charges et sur sa voisine, #3. Pour cela, il faut appliquer 1V sur la piste qui nous intéresse, #2 ou #3 et 0V sur toutes les autres électrodes. Il faut également éliminer toute charge d'espace. On obtient deux situations quasiment similaires, aux effets de bord près, illustrées ci-dessous :



On peut donc propager les trajectoires des paires électrons/trous calculées plus haut dans le champ réel sur chaque carte de champ virtuel des pistes pour élaborer le courant qu'elles mesurent et la charge qu'elles reçoivent au cours du temps. On obtient alors les courbes suivantes (à gauche pour le courant, à droite pour la charge, en bleu pour la piste #2 qui reçoit toutes les charges et en rouge pour sa voisine, #3, qui n'en reçoit aucune) :



Sans surprise, la charge totale collectée sur l'électrode #2 correspond à la charge totale déposée. Par contre, on remarque que, de façon transitoire, le mouvement des porteurs au sein du détecteur induit un courant sur la piste voisine #3. Celui-ci atteint, dans le cas illustré, une quinzaine de pourcents du courant crête de la

piste #2. Comme aucune charge ne parvient sur l'électrode #3, la charge totale mesurée retourne bien à 0 après le transitoire. Bien entendu, ce genre de comportement peut avoir des conséquences étonnantes lorsque les particules incidentes déposent des énergies très variables, en particulier, les pistes voisines peuvent trigger alors que la charge totale qu'elles mesureront sera nulle. Il faut par conséquent bien comprendre tous ces effets de bord (et il y en a bien d'autres, par exemple le couplage capacitif) pour correctement exploiter l'information d'un détecteur à pistes...

6 Modélisation des détecteurs

Le théorème de Ramo-Shockley est un outil formidable pour guider le développement des détecteurs. Il est cependant insuffisant pour notre propos car il ne prend en compte que la partie électrostatique du problème.

Nous avons vu qu'il faut apporter une haute-tension sur une ou plusieurs électrodes et pour le moment, notre électrode de mesure est directement reliée à la masse. C'est intéressant pour commencer, mais cela ne nous mène pas bien loin. En définitive, pour avancer, nous avons besoin de deux choses bien distinctes :

1. Savoir polariser correctement un détecteur tout en satisfaisant aux conditions d'applications du théorème de Ramo-Shockley (sinon, il n'est plus valable et on ne sait plus ce que l'on fait).
2. Savoir extraire proprement un signal en ne déformant pas les signaux prévus par le théorème (sinon, on perd tout l'intérêt de ce qui a été dit précédemment).

Avant d'aborder ces aspects, nous allons faire quelques rappels d'électronique élémentaire.

6.1 Interlude électronique

Pour faire face aux questions qui vont nous occuper dans les paragraphes suivants, il est utile d'avoir quelques notions d'électronique. Nous allons, pour le moment, nous intéresser aux composants passifs, plus spécifiquement, aux résistances et aux capacités. Ce petit interlude sera l'occasion de faire quelques rappels d'électronique utile et d'apprendre quelques méthodes efficaces de calcul.

6.1.1 Domaines temporel, de Fourier & de Laplace, sans complexes (ou presque)!

On se rappelle tous des relations « simples » liant le courant et la différence de potentiel dans les composants passifs (résistances, capacités et selfs), par exemple $u = R \cdot i$, $i = C \cdot \frac{du}{dt}$ et $u = L \cdot \frac{di}{dt}$ (où u et i sont des fonctions du temps). Ceci étant, le moindre problème d'électronique se transforme rapidement en redoutable système d'équations différentielles compliqué à résoudre. Fort heureusement, deux outils nous viennent en aide : il s'agit de la transformée de Fourier (pour les signaux périodiques) et la transformée de Laplace (pour les signaux impulsionnels, nuls avant $t = 0$). L'astuce de ces méthodes consiste à remplacer les opérateurs de dérivation (resp. d'intégration) par des produits simples d'une variable symbolique, « $\cdot j\omega$ » pour Fourier¹³ (resp. « $\cdot \frac{1}{j\omega}$ ») et « $\cdot p$ » pour Laplace (resp. « $\cdot \frac{1}{p}$ »). Sans entrer dans les détails mathématiques (relativement complexes, en particulier pour la transformée de Laplace qui repose sur la théorie des distributions), l'algèbre des transformations est un formidable outil pour la résolution des systèmes linéaires d'équations différentielles qu'il convient de maîtriser. Dans la suite de ce document, nous passerons sans scrupules d'un espace à l'autre en appliquant les relations de passage : $\frac{d}{dt} \leftrightarrow \cdot j\omega \leftrightarrow \cdot p$

En pratique, on n'écrit que très rarement l'équation différentielle d'un circuit et on ne cherche surtout pas à la résoudre (chaque couple capacité/résistance, chaque amplificateur ajoute typiquement un degré au système...). On procède comme suit :

¹³ Dans « $j\omega$ », j est l'opérateur complexe (i , quoi !) et ω est la pulsation ($\omega = 2\pi f$) en rd.s^{-1} .

1. On calcule la fonction de transfert reliant la sortie (l'observable) à l'entrée (la source d'excitation). La fonction de transfert ne préjuge en rien de la forme temporelle de l'entrée. On peut faire ce travail dans le domaine temporel ou bien directement dans les domaines de Laplace ou Fourier, peu importe. C'est généralement cette seconde solution qu'utilisent les électroniciens, alors que les physiciens préfèrent la première. Néanmoins, le domaine de Laplace présente l'énorme avantage de transformer une équation différentielle en équation polynômiale, puisqu'il suffit de remplacer tous les $\frac{d^n}{dt^n}$ par des p^n . L'équation du circuit étant linéaire, on peut alors exprimer le rapport de la sortie sur l'entrée sous la forme d'une fraction rationnelle $H = P(p)/Q(p)$. C'est la fonction de transfert.
2. Le domaine de Fourier permet (en remplaçant p par $j\omega$) d'étudier cette fonction de transfert dans le régime harmonique. Ainsi, en analysant le module de la fonction de transfert, on peut exprimer quels domaines fréquentiels sont amplifiés ou atténués relativement les uns aux autres, et donc généralement simplifier singulièrement la fonction de transfert quand on connaît approximativement le domaine qui nous intéresse.
3. Ensuite, on peut revenir dans le domaine de Laplace (avec notre circuit simplifié) de façon à étudier sa réponse à des stimuli transitoires (les signaux de physique nucléaire sont transitoires). Pour cela, il faut connaître la transformée de Laplace du stimulus (grâce à des tables de transformée de Laplace). On fait le produit de la fonction de transfert par le stimulus, on calcule la transformée de Laplace inverse (ou plus exactement, on la recherche dans une table) et le tour est joué, on obtient le résultat dans le domaine temporel.

Cette gymnastique peut paraître un peu déroutante au début. Elle nécessite certes un peu d'expérience, mais c'est de très loin la méthode la plus efficace pour parvenir à des résultats exploitables. Nous allons la mettre en œuvre dans les paragraphes suivants.

Pour le moment, on doit simplement retenir le point ❶ qui est illustré ci-dessous :

Soit l'équation différentielle suivante (dans le domaine temporel), pour laquelle l'entrée n'est pas encore spécifiée :

$$\alpha \cdot s + \beta \cdot \frac{ds}{dt} = \gamma \cdot e + \delta \cdot \frac{de}{dt} + \varepsilon \cdot \frac{d^2e}{dt^2}$$

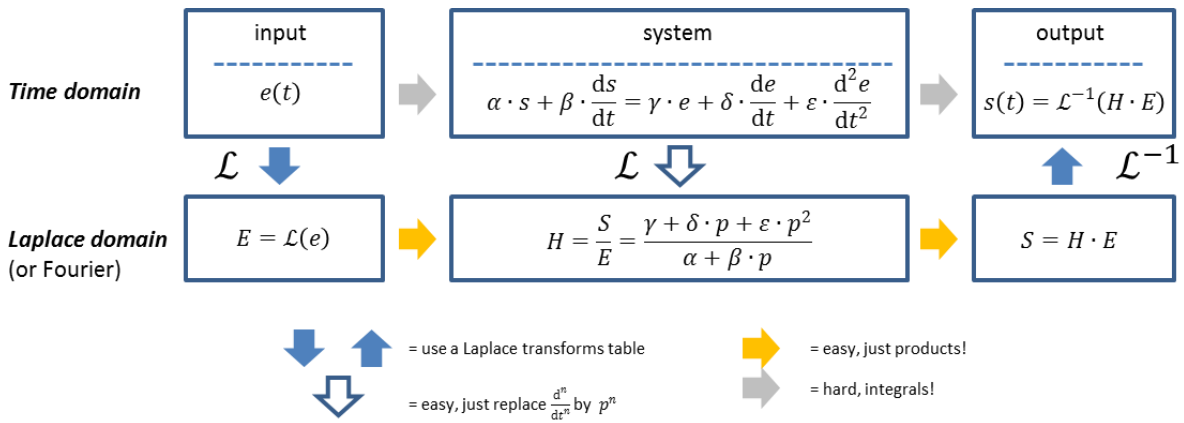
La transformée de Laplace de la fonction de transfert s'écrit directement :

$$H = \frac{S}{E} = \frac{\gamma + \delta \cdot p + \varepsilon \cdot p^2}{\alpha + \beta \cdot p}$$

Et sa transformée de Fourier :

$$H = \frac{S}{E} = \frac{\gamma + \delta \cdot j\omega - \varepsilon \cdot \omega^2}{\alpha + \beta \cdot j\omega}$$

La démarche est illustrée sur le graphe suivant (qu'il faut pratiquer un minimum pour admirer son élégance et sa simplicité) :



6.1.2 Méthode de calcul des circuits électroniques

6.1.2.1 Un petit exemple simple, mais fondamental

1. Soit le circuit ci-contre. On cherche à exprimer la tension lue v_m en fonction du générateur de courant d'entrée i . Le circuit est très simple. On commence par exprimer les tensions et courants dans tous les composants. On a donc :

$$i_c = C \cdot \frac{dv_m}{dt}, i_R = \frac{v_m}{R} \text{ et } i_c + i_R = i$$

Dont on tire :

$$C \cdot \frac{dv_m}{dt} + \frac{v_m}{R} = i$$

Par conséquent, dans le domaine de Laplace, on a :

$$C \cdot p \cdot V_m + c/R = I, \text{ soit } \frac{V_m}{I} = \frac{R}{1+p \cdot RC}$$

C'est notre fonction de transfert. En pratique, on sait obtenir cette dernière expression directement (voir ci-dessous).

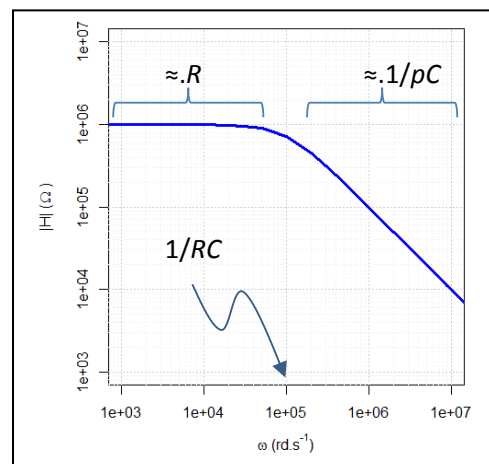
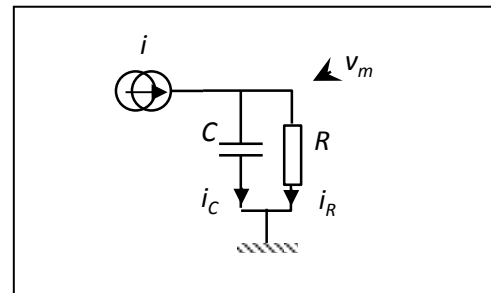
2. On passe dans le domaine de Fourier :

$$\frac{V_m}{I} = \frac{R}{1+j\omega \cdot RC} \text{ et on calcule le module}$$

$$\left| \frac{V_m}{I} \right| = \frac{R}{\sqrt{1+(\omega \cdot RC)^2}} \text{ qui est représenté ci-contre en prenant}$$

$RC=10\mu\text{s}$.

Le produit RC est homogène à une constante de temps qui prendra tout son sens un peu plus loin.



En attendant, on apprend ici que le circuit, en dessous de $10\text{krad}\cdot\text{s}^{-1}$ (pour des temps supérieurs à $10\mu\text{s}$), le circuit correspond à une résistance de valeur R . Si on travaille à « basses » fréquences, sur des temps longs, on pourra le simplifier en ce sens. On a alors affaire à un « amplificateur de courant de sensibilité R ».

Si on travaille sur des temps « courts » (inférieurs à 10µs), donc des fréquences « élevées », il présente un comportement purement capacitif $\frac{1}{p \cdot C}$. On se rappelle que l'opérateur $\frac{1}{p}$ est un intégrateur. Notre circuit réalise donc l'intégrale du courant avec une sensibilité égale à 1/C.

Cela est fort utile car nos détecteurs sont des générateurs de courant et on souhaite généralement en premier lieu mesurer l'énergie déposée, soit la charge qui est précisément l'intégrale du courant¹⁴...

Regardons maintenant ce qu'il advient si on utilise une impulsion de courant. Pour cela, il faut repasser dans le domaine de Laplace.

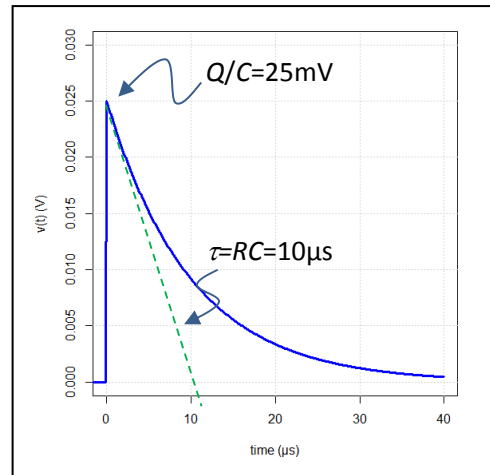
3. Admettons maintenant qu'on stimule notre circuit au moyen d'un générateur de courant impulsionnel. Disons que cette impulsion dure un temps très court (devant 10µs) et qu'on peut la modéliser sous la forme d'une impulsion de Dirac. On a donc $i(t) = Q \cdot \delta(t = 0)$, comme cela a déjà été expliqué. La réponse de notre circuit s'écrit donc :

$$V_m = \frac{R}{1+p \cdot RC} \cdot \mathcal{L}(i(i)) = \frac{R}{1+p \cdot RC} \cdot Q \quad (\text{la transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac vaut 1}).$$

On cherche donc (dans un dictionnaire) $v_m(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{R}{1+p \cdot RC} \cdot Q\right)$ et on trouve :

$$v_m(t) = \frac{Q}{C} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), \quad \text{qui est représenté ci-}$$

contre pour $Q=250\text{fC}$ (à peu près la charge déposée dans un détecteur silicium par un α de 5MeV), $R=100\text{M}\Omega$ et $C=10\text{pF}$:



On apprend maintenant (sans trop de surprises) que la réponse de notre circuit à un α donnerait un signal de 25mV (à l'instant de passage de la particule) qui décroît de façon exponentielle vers 0V avec une constante de temps de 10µs.

En définitive, ce petit exercice nous a permis de comprendre le fonctionnement d'un des triptyques fondamentaux de l'instrumentation nucléaire (générateur de courant // Capacité // Résistance). Le générateur de courant (parfait) charge instantanément la capacité (produisant une différence de potentiels proportionnelle à la charge déposée et inversement proportionnelle à la valeur de la capacité) qui va elle-même se décharger plus ou moins lentement à travers la résistance (ceci à la vitesse $\tau = RC$).

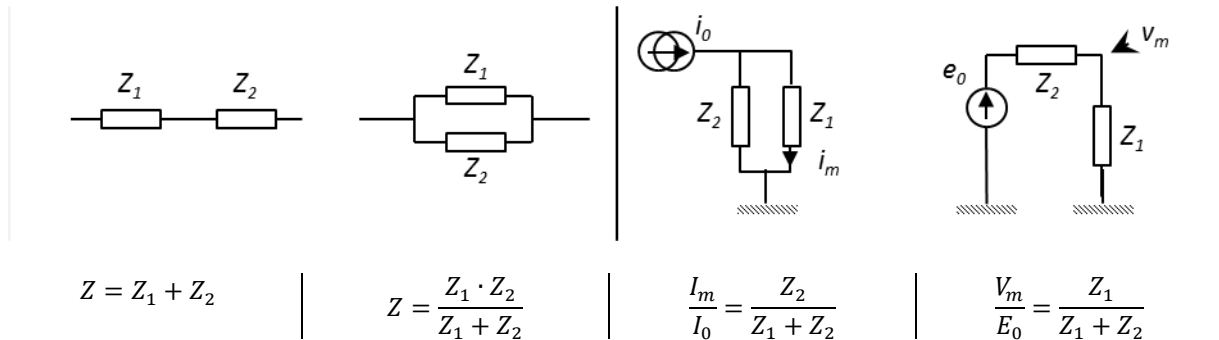
6.1.2.2 Impédances séries, parallèles & diviseur

L'impédance d'un composant passif n'est que la « fonction de transfert » liant la tension à ses bornes au courant qui le parcourt. On la note (généralement) Z et elle vaut $Z = U/I$. Elle se mesure en Ω et, dans le domaine de Fourier, est un nombre complexe. En reprenant les équations différentielles de ces composants, on ne sera pas étonné des relations suivantes :

	Domaine temporel	Domaine de Fourier	Domaine de Laplace
Résistance	$u = R \cdot i$	$Z = R$	$Z = R$
Capacité	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$Z = \frac{1}{C \cdot j\omega}$	$Z = \frac{1}{p \cdot C}$
Inductance	$u = L \cdot \frac{di}{dt}$	$Z = L \cdot j\omega$	$Z = p \cdot L$

¹⁴ En pratique, on ne va pas procéder exactement comme ça, mais les grandes idées sont là !

Moyennant quelques calculs élémentaires, on peut facilement établir (et si possible connaître) les quelques relations de circuits qui sont d'usage courant:



On remarquera un point trivial mais important dans le cas du générateur de courant. Lorsque les impédances sont très dissymétriques, le courant va toujours aller majoritairement vers la plus faible des deux. On utilisera cet argument plus tard pour simplifier des circuits qui, sans cela, seraient rapidement incompréhensibles.

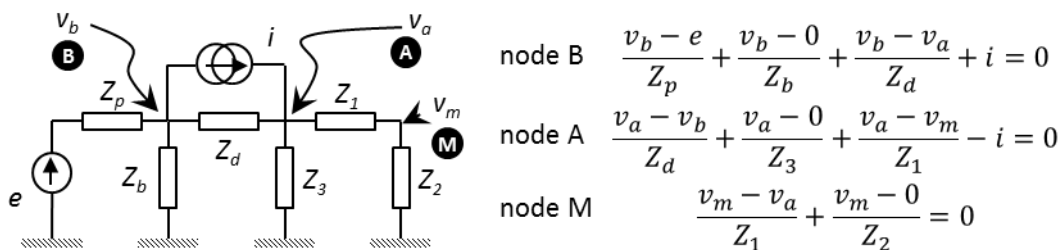
6.1.2.3 La loi des nœuds exprimée en tension...

Résoudre un circuit électronique est généralement pris comme un problème complexe par les débutants. Il n'en n'est rien si on applique la bonne méthode. Celle-ci consiste à identifier tous les nœuds du système et à leur appliquer la « loi des nœuds » qui nous dit que la somme des courants sur un nœud est nulle, facile ! Mais, et c'est là la subtilité, on va l'exprimer en tension... Il n'y a pas à réfléchir, c'est complètement automatique.

De façon systématique, il ne faut pas raisonner en tension aux bornes des composants, mais en potentiel des nœuds du système. On peut toujours, au besoin, à la fin du problème, exprimer la tension (c'est simplement la différence de potentiels à ses bornes).

- Il convient en premier lieu de choisir un potentiel de référence (la masse électrique fait parfaitement l'affaire, mais on peut prendre ce que l'on veut).
- Ensuite, on identifie (on nomme) tous les nœuds du système.
- Et on écrit qu'en chaque nœud, la somme des courants (sortants, par exemple) est nulle, mais on fait cela en exprimant les potentiels aux bornes des impédances.
- On obtient un système linéaire d'équations qu'il n'y a plus qu'à résoudre pour finir le problème

Illustrons cela par un petit exemple. Soit le circuit suivant et son système d'équations (on connaît e et i). On a identifié trois nœuds A, B, et M dont les potentiels valent respectivement v_a , v_b et v_m . On voudrait bien connaître la tension aux bornes de l'impédance Z_2 , soit $v_m - 0V = v_m$:



Chaque équation est relative à un nœud. Elle est constituée de fractions rationnelles dont le numérateur correspond à la différence de potentiel entre le nœud courant (v_b pour la première ligne) et le nœud auquel il est

relié à travers une impédance dont la valeur se retrouve au dénominateur. On n'oublie pas les générateurs de courant (avec un signe + s'ils sortent et - s'ils entrent dans le nœud). Le système est posé. Il a trois équations et trois inconnues, ça devrait bien se passer et on devrait, avec quelques efforts, réussir à exprimer v_m en fonction de e , i et des impédances du circuit.

Une fois le système résolu, on peut alors optimiser le circuit en répondant par exemple aux questions suivantes :

- Comment choisir les impédances pour que la tension mesurée représente au mieux le générateur de courant ?
- Comment les choisir pour que la tension mesurée ne dépendent plus des variations du générateur de tension d'entrée ?
- Etc...

L'exercice n'est pas que purement académique, le circuit qui vient d'être décrit correspond plus ou moins à l'environnement d'un détecteur. On va cependant l'aborder de façon un peu moins abrupte pour en tirer des conclusions plus générales dans la suite du cours.

6.2 Modélisation

Le théorème de Ramo-Shockley ne constitue pas une modélisation complète du détecteur. Il nous explique simplement la forme du générateur de courant qui apparaît aux différentes électrodes qui le constituent. Il nous faut maintenant « habiller » ce détecteur des éléments annexes qui vont nous permettre d'apporter la haute-tension et d'extraire le signal, le tout proprement. Il faut en effet veiller à ne pas déformer notre générateur de courant et apporter le minimum de bruit (chaque composant qu'on va ajouter va avoir un effet sur cet aspect particulier).

6.2.1 La « capacité détecteur »

Un détecteur est avant tout un ensemble d'électrodes en regard les unes des autres. On vient de décrire ici un condensateur élémentaire qui dépend finement de la géométrie de notre capteur. Pour fixer quelques ordres de grandeur, on peut, au moins en première approximation, regarder les valeurs des capacités obtenues pour deux grandes classes de condensateurs :

1. Le condensateur plan (chambres à plaques parallèles, chambres à ionisation, ...)

Sa capacité vaut $C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{S}{e}$

où S est la surface (en m) et e l'épaisseur (en m)

2. Le condensateur cylindrique (compteur proportionnel, détecteurs germanium coaxiaux, ...)







Sa capacité vaut $C = 2\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{h}{\ln(R_{ext}/R_{int})}$

où h est la hauteur du cylindre (en m), R_{ext} et R_{int} les rayons respectifs de l'armature externe et interne (même unités)

la permittivité du vide, ϵ_0 , vaut $8,8\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$ et ϵ_r est la permittivité du matériau situé entre les électrodes. Quelques valeurs typiques sont données ci-contre.

material	ϵ_r
Vacuum/gas	1
silicon	≈ 12
germanium	≈ 16
diamond	5.5
PCB	3.5..4.5

Voici un petit compendium de détecteurs et leurs capacités associées :

Chambre à plaques //		Largeur	10cm	≈ 30pF
		Epaisseur	3mm	
Jonction silicium (A)		Largeur	5cm	≈ 880pF
		Epaisseur	300μm	
Jonction silicium (B)		Diamètre	2cm	≈ 66pF
		Epaisseur	500μm	
Jonction silicium (C)		Diamètre	1mm	≈ 0.3pF
		Epaisseur	300μm	
Compteur proportionnel		Diamètre fil	50μm	≈ 1.8pF
		Diamètre externe	2cm	
		Longueur	20cm	
Détecteur germanium coaxial		Diamètre externe	5cm	≈ 27pF
		Diamètre interne	1cm	
		Hauteur	5cm	

Suivant la géométrie, les capacités d'un détecteur varient globalement sur 3 ordres de grandeur. C'est un point auquel il faut porter une grande attention. Nous verrons plus loin que cette « capacité détecteur » a une action fondamentale sur le bruit électronique. Plus elle est grande, moins bonne sera la résolution de l'équipement. Les trois jonctions silicium données en exemple n'auront pas les mêmes performances. On pourra espérer des résolutions en énergie de quelques centaines d'eV avec (C), La résolution de (B) sera aux alentours du keV et celle de (A) ne pourra faire mieux que quelques dizaines de keV, et cela, juste à cause de leurs capacités respectives...

Un petit détail de conception ; la capacité détecteur n'est pas limitée au volume sensible de celui-ci mais s'étend bien à toute la surface des électrodes en regard. Reprenons l'exemple de la chambre à plaques parallèles ci-dessus. On pourrait espérer une capacité de 30pF. Ceci étant, lors de sa construction, il faut bien mettre un support aux électrodes (en mylar, par exemple). On décide donc de les coller sur 2cm (c'est plus « confortable ») en périphérie du volume sensible sur du circuit imprimé (PCB) séparant haute-tension et mesure. On vient ainsi de mettre deux condensateurs en parallèle. Le premier -notre volume sensible- a toujours une capacité de 30pF ; le second -notre collage- correspond à une surface additionnelle de 96cm² avec un diélectrique de permittivité relative égale à 4, soit ≈110pF ! Il faut singulièrement se méfier des effets de bord (la surface croît avec le carré de la longueur) et peut-être revoir les notions de « confort » (quand c'est possible)...

6.2.2 Polarisation des détecteurs

La polarisation d'un détecteur (concrètement, apporter la haute-tension là où il faut) est un problème plus complexe qu'il y paraît. Elle doit satisfaire diverses contraintes qui sont parfois antagonistes.

1. Il faut que le potentiel de l'électrode soit bien défini, quel que soit le courant moyen débité dans le détecteur.
2. Le théorème de Ramo-Shockley exige également que ce potentiel soit parfaitement fixe en régime transitoire (c'est fondamental si on exploite cette forme, sinon, c'est accessoire).
3. Les alimentations haute tension (souvent des alimentations à découpage) ne sont pas exemptes de bruit et il est souvent nécessaire de les filtrer sévèrement, sous peine de récupérer ce bruit, par couplage capacitif, sur l'électrode de mesure.
4. Il arrive, dans la vraie vie, que les détecteurs claquent, faisant des étincelles du plus bel effet. On a vu qu'un détecteur était constitué de capacités. L'énergie stockée sur ces capacités vaut $\frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2$, soit, par exemple, pour 100nF et 1000V, 50mJ. Lors d'un claquage, cette énergie s'évacue pour une grande partie dans les électroniques qui n'apprécient pas nécessairement l'exercice...

En procédant de manière itérative, on peut définir des schémas de polarisation prenant plus ou moins en compte les différentes contraintes. Ils dépendent très précisément de l'application visée et ce qui suit n'est qu'un « mode d'emploi » qu'il faut ajuster pour chaque cas.

On dispose donc d'une alimentation haute-tension (supposée bruyante, c'est plus réaliste). Elle est équivalente, en première approximation, à une forte capacité (quelques nF à quelques μF) qui ne demande qu'à délivrer son énergie en cas de claquage (point ④). Il convient donc de lui placer une résistance série R_p pour limiter ses ardeurs destructrices¹⁵.

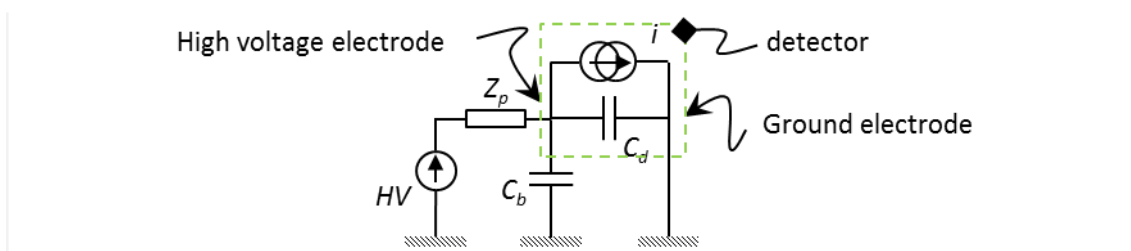
Ce faisant, la consommation moyenne de courant dans le détecteur due au faisceau ($\bar{i} = \text{nombre de coups par seconde} \times \text{charge déposée en moyenne par coup} \times \text{gain éventuel du détecteur} \times e$) va nécessairement faire baisser le potentiel de l'électrode de haute-tension de $\Delta u = R_p \cdot \bar{i}$. Si on tolère un Δu donné, on dispose d'une valeur haute à ne pas dépasser pour R_p (point ①).

Par exemple, des ions lourds déposent 1GeV dans un détecteur silicium ($\approx 300 \cdot 10^6$ paires créées) à raison de 10^4 coups par seconde. On tolère une baisse de polarisation de 1V, la résistance maximale est donc de $2\text{M}\Omega$.

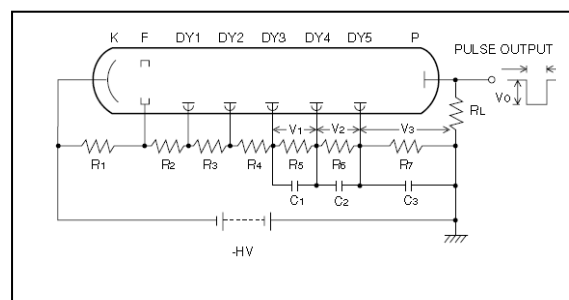
En ajoutant cette résistance, on viole le point ② et on ne satisfait pas encore le point ③. Pour garantir la stabilité du potentiel en régime transitoire, il est de bon ton de disposer d'un réservoir de charges (une capacité de ballast, C_b) sur lequel le détecteur va pouvoir « pomper » l'équivalent des charges qu'il va mettre en mouvement en son sein. S'il doit débiter, en un temps court, une quantité de charge $\Delta Q = \text{charge déposée par la particule incidente} \times \text{gain éventuel du détecteur} \times e$, alors la tension de l'électrode va baisser de $\Delta u = \Delta Q / C_b$. On dispose donc d'une valeur minimale de capacité de ballast permettant de satisfaire le point ②.

Par exemple, une particule produit 10^3 photoélectrons à la photocathode d'un tube photomultiplicateur de gain 10^6 . La consommation sur la dernière dynode est (très approximativement) de l'ordre de $1.6 \cdot 10^{-10}\text{C}$. On tolère une dépolarisation de 1V, il faut donc une capacité de ballast supérieure à 160pF (dans certains cas, la capacité détecteur peut suffire).

Actuellement, notre détecteur ressemble au circuit suivant (le générateur de courant est le signal) :



Il est globalement conforme aux exigences données plus haut. On trouve des schémas de polarisation bien plus « complexes » pour les tubes photomultiplicateurs, par exemple ci-contre (doc Hamamatsu). Le principe sous-jacent est exactement celui-évoqué ci-dessus. Il n'y a pas de capacité de ballast sur la photocathode (K) car la consommation impulsionnelle en ce point est ridicule. Elles sont par



¹⁵ Les bonnes alimentations haute-tension (i.e. presque toutes) disposent de mécanismes de coupure en cas de détection de surconsommation en courant (en d'autres termes, en cas de flash du détecteur). Elles sont certes efficaces, mais n'empêchent en rien le premier claquage de démarrer. Elles évitent principalement l'auto-entretien de ce mécanisme, ce qui est déjà une bonne protection.

contre présentes sur les dernières dynodes (DY3-5).

Lorsqu'il y a plusieurs électrodes à polariser, comme dans le cas du tube photomultiplicateur, l'envie est parfois grande d'utiliser plusieurs hautes tensions pour amener les potentiels aux points clefs du dispositif, de façon à jouer librement sur leur valeur. C'est particulièrement le cas lorsqu'on cherche un point de fonctionnement efficace et stable. C'est généralement une mauvaise idée pour deux raisons :

1. En cas de claquage, toutes les alimentations ne vont pas forcément « tomber », ou pas forcément en même temps. Gare à la casse...
2. Les alimentations haute-tension ne sont pas des générateurs de tension parfaits. Dans certains cas, leur conception les empêche de « tirer » du courant et le comportement de l'ensemble ne va pas forcément être celui que l'on pense (en dépit de lectures de tensions appliquées apparemment correctes).

6.2.3 Extraction du signal

Le détecteur est un générateur de courant parfait. Pour mesurer ce dernier, il faut lui fournir un chemin à basse impédance vers la masse à travers notre électronique de mesure (comme cela a été expliqué plus haut lors de l'étude des circuits élémentaires). C'est la raison pour laquelle nous avons toujours représenté notre électrode de mesure connectée à la masse. En réalité, notre électronique est une impédance et on supposera qu'elle est faible, relativement aux autres impédances du circuit (résistance de polarisation et capacités diverses). On pourrait s'arrêter à ce point pour l'extraction du signal mais il y a deux aspects qui nous manqueraient.

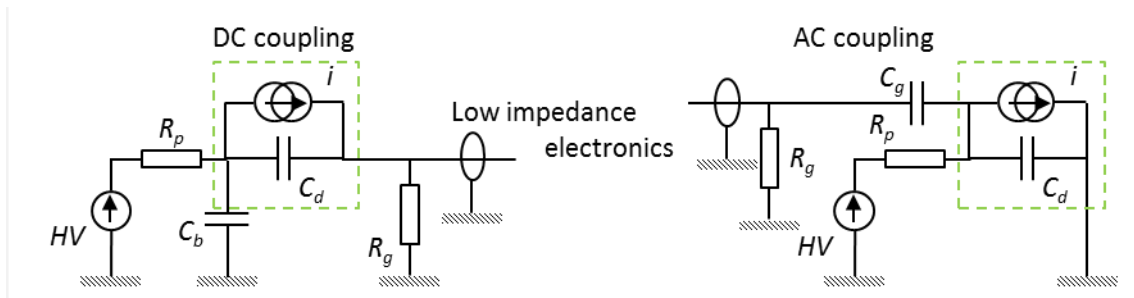
Le premier est relatif à la protection des circuits. Que se passe-t-il si on oublie de connecter notre électronique et qu'on monte la haute-tension ? En fait, le détecteur va fonctionner tout à fait normalement. Le générateur de courant (de physique) va progressivement charger l'électrode de mesure jusqu'à ce qu'elle dépolarise le détecteur. Quand, plus tard, on va remédier à notre oubli, on va connecter notre électronique à une électrode... à la haute-tension ! Une bonne solution consiste tout simplement à implanter une résistance de forte valeur (R_g plusieurs dizaines de $M\Omega$ par ex.) entre le point d'accès et la masse (dans le détecteur).

Le second point est moins trivial. On a souvent besoin, de plusieurs « copies » du signal pour travailler. L'une va permettre de mesurer la charge, l'autre l'instant de passage et la troisième va servir quelque part pour une position, par exemple. Splitter le signal est toujours une mauvaise idée quand on peut faire autrement. C'est justement le cas sur notre exemple ! Pour le moment, nous disposons du signal de l'électrode de masse et nous avons sacrifié l'électrode haute-tension, mais le générateur de courant (inversé) est bel et bien présent à cet endroit. On peut donc en bénéficier en lui trouvant un chemin à basse impédance vers une électronique. Comme il est à la haute-tension, il faut un découplage capacitif solide (C_c dans la gamme du nF) et on dispose, au besoin, d'un signal de secours. Attention, si on procède comme cela, il faut enlever la capacité de ballast car c'est la capacité de découplage qui va jouer son rôle. On notera également que, sous cette solution, le signal est flottant¹⁶.

¹⁶ Un signal flottant est dit en mode AC (alternative Current), par opposition au mode DC (Direct Current) référencé à la masse. Le mode AC pose pas mal de problèmes en instrumentation, comme nous le verrons plus loin, mais il a le mérite d'exister.

6.2.4 Le détecteur proprement habillé

On a donc, au choix entre deux schémas de polarisation (que l'on peut mélanger) :



Attention cependant, lorsqu'on dispose d'un détecteur qui dispose de multiples sorties (typiquement une DC, la voie « noble » et une AC pour exécuter des opérations moins sujettes au bruit), il faut éviter de laisser les sorties inutilisées « en l'air ». On prendra soin de les boucher avec une charge 50Ω , par exemple.

6.2.5 Le câble, cet ami qui vous veut du bien...

... mais dont il convient de se méfier au plus haut point !

Un câble est avant tout un fil électrique menant un générateur (de courant ou de tension, peu importe) vers une impédance de charge (une résistance, un préamplificateur, ...). On utilise en instrumentation des câbles coaxiaux constitués d'une âme blindée par une tresse métallique destinée à protéger les (faibles) signaux des perturbations électromagnétiques externes et à garantir qu'ils arriveront à destination sans (trop de) déformations. Ce sont les raisons d'être d'un bon câble.

On reconnaît maintenant ici les prémisses d'un condensateur cylindrique et on se doute qu'il va y avoir quelques petites difficultés... Un câble est défini par quelques paramètres fondamentaux. Entre autres (pour le câble 50Ω) :

- Sa capacité linéique, c , typ. $100\text{pF}\cdot\text{m}^{-1}$.
- Son inductance linéique, l , typ. $250\text{nH}\cdot\text{m}^{-1}$.
- Son impédance caractéristique, Z_c , qui correspond à la valeur de la résistance qu'il faudrait placer à son extrémité pour éviter les réflexions (les câbles d'instrumentation ont très majoritairement une impédance caractéristique de 50Ω). $Z_c = \sqrt{l/c}$
- La vitesse de propagation, v , typ. $20\text{cm}\cdot\text{ns}^{-1}$, soit un délai de propagation de $5\text{ns}\cdot\text{m}^{-1}$. $v = 1/\sqrt{l \cdot c}$
- Son atténuation linéique, typ. $0.2\text{-}0.5\text{dB}\cdot\text{m}^{-1}$.

En pratique, nos signaux sont très rapides et on se situe dans le domaine des hyperfréquences. On va pouvoir développer plusieurs « approximations » du câble coaxial qu'il est absolument fondamental de bien comprendre pour éviter quelques écueils désagréables.

6.2.5.1 Impédance du couple câble/charge vue par le générateur

L'impédance que « voit » un générateur (courant ou tension) débitant dans un câble (impédance caractéristique Z_c , longueur L , pas de pertes) terminé par une charge Z_l s'écrit :

$$Z = \frac{Z_l + j \cdot Z_c \cdot \tan(\beta \cdot L)}{1 + j \cdot \frac{Z_l}{Z_c} \cdot \tan(\beta \cdot L)}$$

Avec $\beta = \frac{2\pi \cdot f}{v}$

C'est une expression pour le moins complexe mais qui permet déjà de comprendre certains aspects importants de l'objet.

- Pour les signaux très (très) rapides (disons plus courts qu'un aller-retour, sachant que la vitesse de propagation est de $20\text{cm}\cdot\text{ns}^{-1}$), la source « voit » une résistance pure de 50Ω . Ensuite, ça se complique...
- Si on fait l'effort de terminer le câble sur une résistance de 50Ω , alors la source « voit » uniquement une résistance de 50Ω . Le câble devient « transparent » à toutes les fréquences. Ça n'est malheureusement pas toujours possible, pour des raisons liées au bruit que nous exposerons plus loin.

Nous allons à présent examiner quelques points importants qu'il faut comprendre.

6.2.5.2 Réflexions en extrémités de ligne, signaux rapides

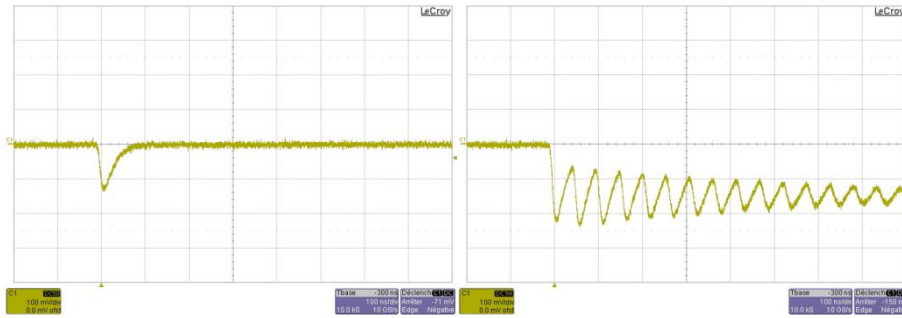
Observer les signaux, c'est une excellente pratique. Encore faut-il le faire proprement ! On trouve parfois, pendant les expériences, des câblages d'oscilloscopes assez « exotiques ». S'ils partent toujours d'une excellente intention, il faut se rappeler que l'enfer est justement pavé de ces bonnes intentions.

A l'extrémité d'un câble d'impédance caractéristique Z_c terminé par une impédance de charge Z_l (celle de l'oscilloscope, par exemple) se produit une réflexion ρ :

$$\rho = \frac{Z_l - Z_c}{Z_l + Z_c}$$

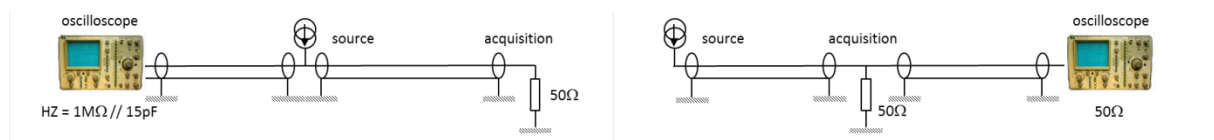
Trois cas de figure apparaissent :

- $Z_l = Z_c$, l'impulsion est absorbée par la charge. C'est le cas idéal. C'est la situation exposée ci-après à gauche (oscilloscope sur 50Ω).
- $Z_l \gg Z_c$, (cas d'un oscilloscope en mode « haute impédance », HZ), $\rho = 1$. L'impulsion repart dans le câble, la « tête » dans le même sens qu'à l'aller. Nos détecteurs étant également haute impédance, elle va rebondir sur le détecteur et revenir, etc... Cette situation est illustrée en bas à droite (oscilloscope HZ, $5\text{m}=25\text{ns}$ de câble entre l'oscillo et le PM).
- $Z_l \ll Z_c$, (cas exotique, mais avec des applications amusantes), $\rho = -1$. L'impulsion repart dans le câble, la « tête » à l'envers.



Admettons maintenant que nous souhaitons observer les signaux d'un détecteur rapide, bien amplifié (pas de problème de bruit), tout en faisant l'acquisition de ces signaux (exercice périlleux !). En tout état de cause, les deux premières approches doivent être prohibées.

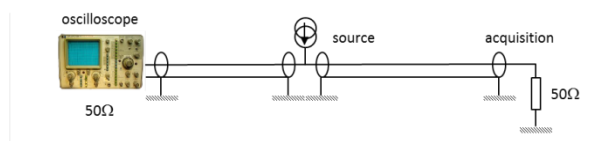
« Il faut revoir sa copie !!! » :



Dans le montage de gauche, l'oscilloscope désadapte la ligne et l'impulsion qui lui arrive va repartir vers l'acquisition...

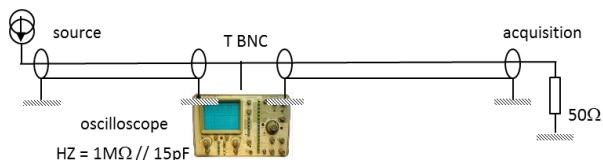
Dans le montage de droite, on a placé un T sur l'acquisition pour continuer le chemin vers l'oscilloscope qui est cette fois-ci mis en basse impédance. Hélas, ce bel effort n'est pas récompensé. Lorsque l'impulsion arrive sur le T, elle voit 50Ω (l'acquisition) en parallèle avec l'impédance caractéristique du câble oscillo (50Ω aussi), soit 25Ω ! 1/3 du signal repart (la tête à l'envers) vers la source où, à coup sûr, il rebondira (haute impédance = la tête dans le même sens).

« Peut mieux faire... » :



Ici, il n'y a pas réellement de problème lié à des désadaptations et de fait, ça fonctionne bien. La source « voit » deux câbles de 50Ω. L'impulsion est donc coupée en deux. L'une part vers la droite, l'autre vers la gauche. Bien entendu, on ne dispose pour l'acquisition que de la moitié du signal. Gare à celui qui débranche l'oscilloscope ou plus amusant le câble après la calibration...

« Un bel effort, bravo ! » :



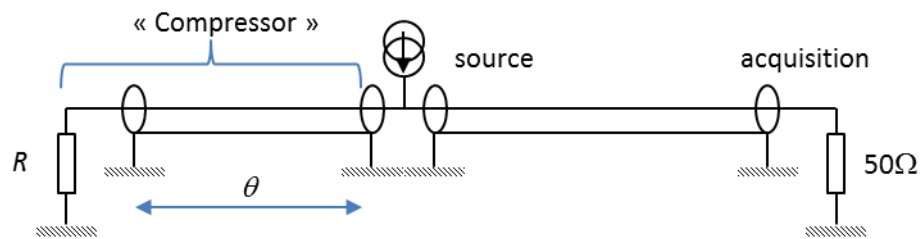
L'oscilloscope est connecté sur la ligne et on veille bien à le laisser en haute impédance. On le connecte directement entre les deux câbles au moyen d'un T et on n'ajoute surtout pas de câble entre le T et l'oscilloscope. On a donc une rupture d'impédance sur quelque chose comme deux ou trois cm, ce qui n'a pas trop de conséquences tant qu'on ne regarde pas des signaux montant en moins d'une ns.

Bien sûr, il existe d'autres solutions à base de splitters analogiques passifs (ça ressemble au cas ci-dessus, i.e. on perd forcément du signal dans les branches et gare aux débranchages intempestifs) ou actifs. Mais attention, nous verrons plus loin que toute électronique ajoutée du bruit aux signaux !

« Interlude : comment fabriquer un compresseur temporel d'impulsion ? »

Admettons que l'on ait des signaux (peu importe le détecteur) de forme exponentielle décroissante dont la constante de temps τ est « trop longue » et qu'on souhaiterait raccourcir temporellement d'un facteur deux (par exemple). Comment faire ?

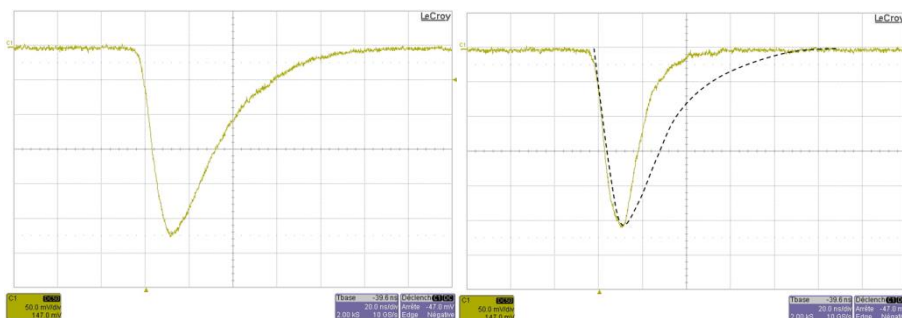
En fait, c'est très simple, il suffit de se rappeler tout ce que nous venons de voir et de faire tout ce qui a été déconseillé (mais cette fois-ci, en toute connaissance de cause) :



L'impulsion de source s'écrit $A \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Elle est divisée en deux lors de sa création. La partie qui nous intéresse est celle qui part à gauche. Elle subit une réflexion ρ sur la résistance et revient au point source au bout d'un temps 2θ où elle « rencontre » sa moitié. Les deux continuent ensemble leur route vers l'acquisition. Juste après la source, le signal s'écrit donc (après une durée 2θ) :

$$\frac{A}{2} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \rho \cdot \frac{A}{2} \cdot \exp\left(-\frac{t - 2 \cdot \theta}{\tau}\right) \propto 1 + \rho \cdot \exp\left(\frac{2 \cdot \theta}{\tau}\right)$$

Par conséquent, si on choisit, par exemple, une résistance de 16Ω , le coefficient de réflexion vaut $-1/2$ (la moitié de l'impulsion incidente va repartir la tête à l'envers) et il suffit de trouver un câble dont la « longueur » vaut $\tau \cdot \frac{\ln(2)}{2}$ pour annuler purement et simplement le signal, comme cela est exposé ci-dessous (à gauche le signal original, à droite, le signal compressé) :



Amusant non ? Attention néanmoins, cette façon de faire a aussi des conséquences sur le bruit qu'il faudrait analyser...

6.2.5.3 Modèles simplifiés du couple câble/détecteur, signaux lents

Il y a de multiples applications pour lesquelles le câble reliant le détecteur à un préamplificateur n'est pas adapté à ses extrémités. C'est le cas en particulier en spectroscopie. La raison est liée à des aspects de bruit électronique qui seront explicités plus loin. Toujours est-il que cette désadaptation a au moins deux conséquences :

1. Les signaux seront déformés (ils rebondissent plus ou moins longtemps dans le câble mais ça n'est pas grave en spectroscopie).
2. Le modèle du câble n'est plus « transparent », et ça, c'est très important !

Prenons le cas de la spectroscopie. On verra plus loin que le domaine fréquentiel qui nous intéresse pour cette application se situe approximativement dans la bande 10kHz-1MHz, soit en reprenant l'équation de l'impédance du câble, β variant approximativement de $3 \cdot 10^{-4}$ à $3 \cdot 10^{-2} \text{m}^{-1}$. Pour une petite longueur de câble, disons $L = 1\text{m}$, on peut approximer la tangente à l'angle. Par ailleurs, les deux extrémités sont à haute impédance (admettons $|Z_l| \gg Z_c \cdot \beta \cdot L$). Une source de bruit (du détecteur ou du préamplificateur) verra donc le câble et son impédance de charge sous la forme :

$$Z = \frac{Z_l + j \cdot Z_c \cdot \tan(\beta \cdot L)}{1 + j \cdot \frac{Z_l}{Z_c} \cdot \tan(\beta \cdot L)} \approx \frac{Z_c}{j \cdot \beta \cdot L} = \frac{1}{j\omega \cdot c \cdot L}$$

Où c est la capacité linéique du câble ($100\text{pF} \cdot \text{m}^{-1}$). En définitive, au moins en première approximation, le câble est assimilable à sa capacité. Nous avons attiré l'attention, plus haut, sur l'importance de conserver des capacités détecteur faibles (en particulier, il faut faire attention aux effets de bords). Nous voyons ici que la capacité détecteur se retrouve également (lorsque les extrémités sont désadaptées) en parallèle avec la capacité du câble, soit une centaine de $\text{pF} \cdot \text{m}^{-1}$. Il va sans dire que, connecter un détecteur à son préamplificateur à travers 1m de câble, va augmenter d'autant la capacité détecteur !

6.2.5.4 Ce qu'il faut retenir

Le câble (coaxial au minimum) et la connectique associée (BNC, c'est bien, même si c'est gros !) sont les chevilles ouvrières de l'instrumentation. Ils sont chers mais il s'agit d'un investissement vital. On ne compte plus les heures perdues à cause d'un câble défectueux. Il faut les préserver au mieux.

Lorsqu'on dispose de signaux de forte amplitude (plus précisément, sortis du bruit), rapides, qu'il ne faut pas déformer, il faut adapter le câble sur son impédance caractéristique, au moins à l'extrémité du receveur (i.e. un préamplificateur).

Lorsqu'on ne peut pas adapter le câble (pour des raisons de bruit), celui-ci peut être considéré en première approximation comme une capacité dont la valeur vaut $C_{cable} = 100\text{pF} \cdot \text{m}^{-1} \times \text{la longueur de câble}$ qui s'ajoute à la capacité détecteur. Il convient donc de minimiser cette longueur.

7 Introduction au traitement du signal

L'émergence, depuis une dizaines d'années, d'électroniques capables de numériser le signal à haute vitesse et haute résolution a permis de faire notablement progresser la qualité des résultats d'instrumentation nucléaire. Il convient cependant de nuancer le propos. Les méthodes « analogiques » de l'instrumentation nucléaire de « Grand-Papa » sont très abouties et généralement proches de l'optimalité. Tous les résultats fondamentaux ont été décrits le siècle dernier dans les années 1950-70. Le bagage vital minimum est de connaître ces résultats pour espérer, parfois, faire un peu mieux.

L'apport de l'électronique digitale se situe quand même sur quelques plans intéressants.

- En premier lieu, la souplesse. On peut reprogrammer à souhait la fonction d'un système d'acquisition digital là où il aurait fallu recâbler de nombreux modules analogiques.
- Ensuite, la versatilité. Si la digitalisation est bien opérée (i.e. n'ajoute pas de bruit additionnel) on peut dupliquer le signal (numérique) à volonté sans perte d'information.
- L'originalité n'est pas en reste. Il est possible, en numérique de créer des fonctions non causales (inaccessibles en électronique analogique) et donc d'approcher l'optimalité d'aussi près que l'on souhaite. Couplée à la versatilité, elle permet de réaliser des fonctions qui auraient également été trop complexes il y a quelques années.

Avant d'aborder ces champs et de les illustrer, nous allons passer un peu de temps à expliquer les méthodes de traitement linéaire du signal. On se limitera bien ici aux aspects linaires, déjà conséquents, et qu'il faut maîtriser avant d'espérer aller plus loin. A notre habitude, nous « sauterons » sans vergogne du domaine temporel (continu) aux domaines de Fourier et Laplace, voire échantillonné. Certains résultats importants sont en effet plus faciles à obtenir dans ces conditions. La rigueur (mathématique) y perd ce que l'efficacité y gagne.

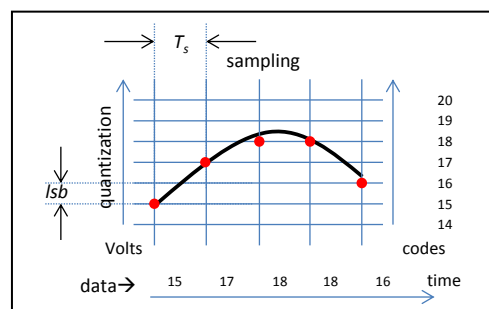
7.1 Du domaine temporel, de Fourier ou de Laplace, au domaine échantillonné

Un convertisseur Analogique/Digital (ADC) réalise, sur le signal analogique, deux opérations distinctes. Il échantillonne celui-ci à des instants bien précis (la fréquence d'échantillonnage,) et il quantifie la valeur analogique sur une grille numérique (dont les pas sont parfaitement fixes). Ces deux opérations sont bien distinctes et ont des conséquences différentes qu'il convient d'examiner.

7.1.1 Echantillonnage & quantification

La quantification revient donc à projeter le signal temporel sur des valeurs bien définies (les bits) Le plus petit écart de bits est appelé « pas de quantification » ou *lsb* (least significant bit). Un ADC de 12 bits sur une gamme de +/-1V découpe par exemple des tranches de $2V/2^{12} \approx 500\mu V$. Cette opération n'est pas sans conséquence. Le signal analogique, de nature aléatoire par essence, peut se situer en réalité n'importe où dans un *lsb*. On prend en compte cette indétermination en disant que la quantification ajoute un bruit dont la distribution est uniforme de largeur $1lsb$ et dont, par conséquent, l'écart type vaut :

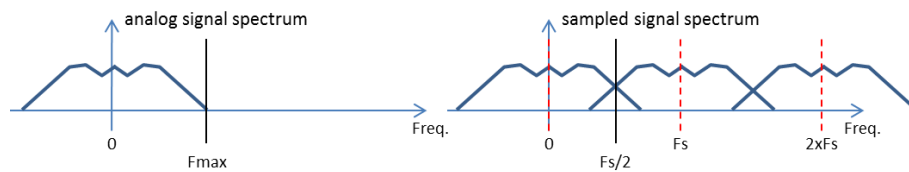
$$\sigma_Q = \frac{lsb}{\sqrt{12}}$$



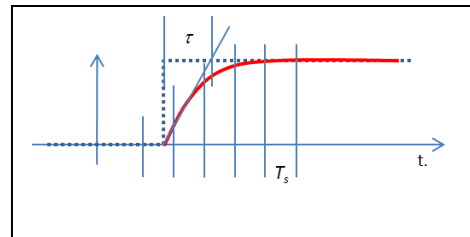
Ce bruit n'est pas blanc puisque corrélé à la forme du signal analogique.

Par ailleurs, l'ADC ajoute ses propres sources de bruit qui peuvent être de l'ordre, voire dépasser le lsb. Ces sources sont « généralement » blanches et gaussiennes.

L'échantillonnage revient, quant à lui, à prélever le signal à des instants très précis gouvernés par la période d'échantillonnage, T_s (l'inverse de la fréquence d'échantillonnage). Cette opération revient en définitive, à multiplier le signal analogique par un peigne de Dirac de largeur temporelle T_s : III_{T_s} . Cette multiplication se traduit, dans le domaine fréquentiel, par une convolution du spectre du signal par un peigne de Dirac $\text{III}_{F_s=1/T_s}$ dont les pics sont espacés de $1/T_s$. En pratique, cela revient à recopier le spectre analogique autour de chaque pic du peigne de Dirac. Les conséquences sont visibles sur le graphe ci-dessous :



On retrouve ici le théorème de Nyquist-Shannon qui nous explique que la bande spectrale analogique ne doit pas s'étendre au-delà de $F_s/2$, sous peine de repliement. Pour éviter cet écueil, on place devant l'ADC un filtre anti-repliement (qui coupe fortement à partir de $F_s/2$). Telle qu'elle, cette contrainte n'est valable que pour les signaux périodiques. En régime impulsionnel, les choses sont plus floues et on va surtout souhaiter placer au moins un point au milieu du front de montée (pour pouvoir mesurer l'instant de passage, par exemple). Si on décide que notre filtre anti-repliement sera un filtre passe-bas du premier ordre (facile à réaliser), on obtient, pour un échelon de tension en entrée la courbe rouge du graphe ci-contre. La constante de temps du filtre doit donc être supérieure à une ou deux fois la période d'échantillonnage. La fréquence de coupure du filtre passe-bas associé est donc de $1/6$ à $1/12$ de la fréquence d'échantillonnage (ce qui est plus restrictif que le critère de Nyquist). En tout état de cause, couper à la fréquence de Nyquist n'est pas une bonne idée pour les signaux impulsionnels !



7.1.2 La transformation en z

Non, ça n'a rien à voir avec le boson de l'interaction faible ! La transformée en z est une méthode mathématique permettant de transformer simplement et efficacement une équation différentielle linéaire, ou une fonction de transfert dans le domaine de Laplace (on a vu que c'était la même chose) en équation aux différences, technique particulièrement bien adaptée au traitement numérique du signal. Bref, après ce paragraphe, on saura passer du domaine temporel au domaine échantillonné en un tournemain, en un mot, on saura filtrer numériquement un signal¹⁷. De quoi s'agit-t-il ?

¹⁷ Les experts du filtrage numérique disposent de méthodes bien plus précises que celles que je vais décrire. Ces dernières représentent néanmoins un excellent point de départ. En définitive, nous verrons plus loin que le régime impulsionnel ne nécessite pas des gabarits de filtres extrêmement précis, mais plutôt une adaptabilité forte aux contraintes expérimentales. Ce qui va être décrit est bien suffisant dans ce sens, pour découvrir le sujet.

7.1.2.1 Une approche simple et efficace

Sur le mode « recette de cuisine » :

On commence par choisir une transformation. Il y en a plusieurs (elles ont toutes des avantages et inconvénients divers) et également d'autres méthodes. Les deux ci-dessous ont l'avantage d'être versatiles et très simples :

Transformation bilinéaire	Approximation de la dérivée
$p \rightarrow \frac{2}{T_s} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$	$p \rightarrow \frac{1}{T_s} \cdot (1 - z^{-1})$

En pratique, une fois le choix opéré, passer d'un filtre analogique à son pendant numérique consiste à

1. Remplacer dans la fonction de transfert S/E , tous les p par la transformation choisie.
2. Réorganiser la fraction rationnelle par ordre de z^{-i} puis redistribuer le dénominateur sur S et ne numérateur sur E .
3. Remplacer tous les z^{-i} du numérateur par des $E[n - i]$ et du dénominateur par $S[n - i]$.
4. Extraire le $S[n]$.

Tout cela peut sembler bien étrange. Appliquons-le sur un filtre passe-haut du premier ordre de constante de temps τ . Notre filtre dans le domaine de Laplace :

$$H = \frac{S}{E} = \frac{\tau \cdot p}{1 + \tau \cdot p}$$

On choisit l'approximation de la dérivée et on a (étapes ❶) :

$$\frac{S}{E} = \frac{\tau \cdot \frac{1}{T_s} \cdot (1 - z^{-1})}{1 + \tau \cdot \frac{1}{T_s} \cdot (1 - z^{-1})} = \frac{\frac{\tau}{T_s} \cdot (1 - z^{-1})}{1 + \frac{\tau}{T_s} - \frac{\tau}{T_s} \cdot z^{-1}}$$

Pour l'étape ❷ :

$$S \cdot \left(1 + \frac{\tau}{T_s} - \frac{\tau}{T_s} \cdot z^{-1}\right) = E \cdot \left(\frac{\tau}{T_s} \cdot (1 - z^{-1})\right)$$

L'étape ❸ est la plus mystérieuse. Remarquons qu'on peut considérer une constante (dans le terme de gauche) comme étant le produit d'elle-même par z^0 :

$$S[n - 0] \cdot \left(1 + \frac{\tau}{T_s}\right) + S[n - 1] \cdot \left(-\frac{\tau}{T_s}\right) = E[n - 0] \cdot \left(\frac{\tau}{T_s}\right) + E[n - 1] \cdot \left(-\frac{\tau}{T_s}\right)$$

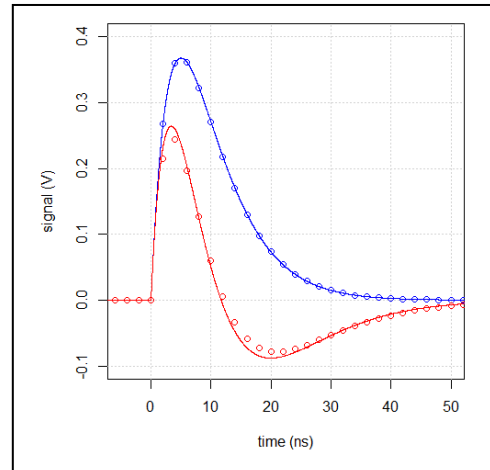
L'étape ❹ est triviale :

$$S[n] = \left(\frac{\tau}{T_s}\right) \cdot (E[n] - E[n - 1] + S[n - 1]) / \left(1 + \frac{\tau}{T_s}\right)$$

Voilà un beau filtre passe-haut tout numérique prêt à fonctionner. On connaît les entrées n et $n - 1$, on se souvient de la sortie $n - 1$, on sait donc calculer la sortie à l'instant courant. Ce filtre est dit « récursif » car la

sortie à n fait intervenir les sorties aux instant précédents On dit aussi qu'il s'agit d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie (si on met une impulsion de Dirac en entrée, la valeur de la sortie ne vaut jamais strictement 0). Attention : les filtres récursifs ont une fâcheuse tendance à l'instabilité (en particulier à cause des arrondis de calcul qui pourraient être opérés).

Le graphe suivant est l'implantation du filtre ci-dessus avec une constante de temps de 8ns, pour une période d'échantillonnage de 2ns (500MHz). En bleu, l'entrée, en rouge, la sortie du filtre. En traits pleins, le signal analogique original et filtré par un « vrai » filtre analogique, en ronds, la même chose en numérique. On constate que, si l'allure de la réponse est globalement correctement rendue, la réponse sur les premiers échantillons semble manquer un peu d'énergie. Ça n'est généralement pas un « gros » problème comme nous le verrons plus loin dans les cas concrets. Notons en passant que les coefficients du filtre sont relativement simples. Il faut multiplier par $\frac{\tau}{T_s}=4$ et diviser par $1 + \frac{\tau}{T_s}=5$. On saurait implanter ce filtre dans un composant logique programmable et il fonctionnerait en temps réel.

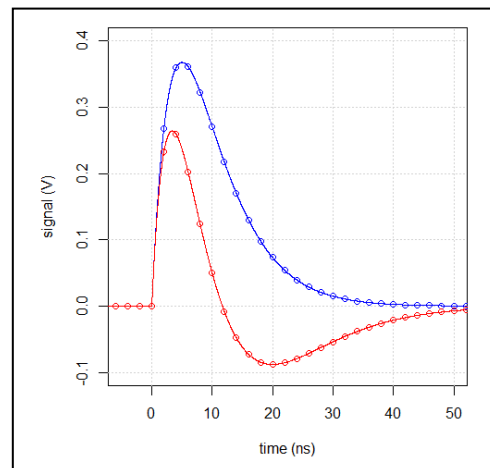


7.1.2.2 Une solution plus subtile, mais...

On connaît l'entrée et on sait la sortie qu'on voudrait obtenir. On pourrait, dès lors, « libérer » les coefficients et les ajuster pour qu'ils nous donnent exactement la réponse désirée. Pour cela, il suffit de présenter le signal d'entrée au filtre générique suivant :

$$S[n] = a \cdot E[n] + b \cdot E[n - 1] + c \cdot S[n - 1]$$

On doit définir une fonction de coût, par exemple $cost = \sum (S[n] - S_{desired}[n])^2$ et laisser faire un minimiseur (ou bien de remarquer que le problème est linéaire et de le résoudre par les moindres carrés). On obtiendrait alors la réponse ci-contre qui, cette fois-ci est rigoureusement parfaite.



Les coefficients trouvés sont alors :

$$S[n] = 0.8680416 \cdot E[n] - 0.8709902 \cdot E[n - 1] + 0.7789223 \cdot S[n - 1]$$

La question qu'il faut se poser est « est-ce vraiment ce que l'on veut faire ? ».

On remarque en premier lieu qu'on a perdu la « simplicité » d'implantation. Il faudrait maintenant faire des calculs bien plus « complexes » qu'avant, ce qui n'est pas un problème sur un ordinateur, mais peut le devenir pour une application temps réel.

Plus grave, si on a utilisé un filtre passe-haut, c'est souvent pour éliminer une composante continue. Dans notre précédente implantation, la somme des coefficients de l'entrée étaient rigoureusement nulle. On

coupaient effectivement le continu. A présent, celle-ci vaut $-0.00295\dots$ un éventuel niveau continu ne serait plus absorbé par le filtre.

On retiendra que le filtrage numérique, peut réserver quelques surprises. Il faut toujours bien garder en mémoire ses intentions et vérifier que le filtre développé les remplit toutes.

7.2 Le filtrage

Il y a quand même une question qu'on n'a pas encore soulevée et qui mériterait qu'on s'y attarde un peu : « Au fait, filtrer un signal, ça sert à quoi ? ». On a, jusqu'à présent, vu essentiellement deux applications triviales du filtrage pour :

- éliminer le repliement spectral avant échantillonnage (ci-dessus)
- élimination des composantes continues haute-tension (lors de la polarisation) ou laisser passer (qui est le contraire d'éliminer) le signal. On avait déjà opéré des filtres, sans le dire.

En définitive, on utilise un filtre pour laisser passer ce qui nous intéresse et éliminer ce qui nous est désagréable. La seule difficulté, c'est de définir précisément ce qui nous intéresse (l'information) et ce qu'on veut éliminer (le bruit). Une fois ce travail accompli, nous verrons quelques méthodes efficaces permettant de définir le filtre le plus efficace possible. On l'appellera le filtre optimal. Soyez en sûr, Il n'y a aucune méthode permettant d'obtenir de meilleurs résultats (à condition que le problème soit bien posé, bien entendu). Dès lors, on saura définir les performances ultimes que notre système serait capable d'atteindre si on réalisait ce filtre. On peut aussi se livrer à un autre exercice qui consiste à réaliser un autre filtre, ou développer une autre méthode. On pourra donc comparer toutes ces approches au résultat du filtre optimal et donc décider en toute connaissance de cause s'il faut persévérer dans cette voie ou changer de direction. La démarche est donc la suivante :

1. on définit le signal et l'information qui nous intéresse, X
2. on identifie rigoureusement toutes les sources de bruit
3. on calcule le filtre optimal, H_∞
4. on calcule les performances qu'il permet d'atteindre, ENX_∞
5. on approxime le filtre optimal au moyen d'un filtre H_1 (ou toute autre méthode alternative)
6. on évalue ENX_1
7. on conclut en contrôlant sa robustesse aux perturbations pouvant affecter le signal qui n'auraient pas été prises en compte dans le processus d'optimisation.

7.2.1 Signal

En physique nucléaire, on est essentiellement confronté à des signaux impulsionnels aléatoires en temps d'arrivée. Ceux-ci peuvent être :

- Aléatoires en amplitude mais déterministes en forme d'impulsion. On va avoir besoin de mesurer la charge qu'ils transportent et leur instant de passage.
- Aléatoires en amplitude et en forme d'impulsion. Outre la charge et l'instant de passage, on va ici pouvoir exploiter la forme pour en extraire des informations supplémentaires, principalement l'identité de la particule incidente.

7.2.2 Bruit

On ne va traiter ici que les sources de bruit provenant du détecteur et des électroniques associés. On suppose donc les alimentations haute-tension correctement filtrées, la CEM et le bruit microphonique éliminés.

7.2.2.1 La représentation du bruit et les calculs associés

On ne sait pas représenter temporellement le bruit, mais on n'est pas désarmé pour autant.

Dans le domaine temporel, la description est particulièrement pénible car elle doit faire intervenir les corrélations qui lient le bruit à un instant donné à sa valeur dans le passé. En pratique, on travaille plutôt dans le domaine fréquentiel (il n'y a pas de corrélation entre la puissance à une fréquence et la puissance à une autre fréquence) et on utilise une notion appelée la densité spectrale de bruit, $S(f)$. Celle-ci s'exprime en $V^2.Hz^{-1}$, $A^2.Hz^{-1}$, etc. Elle décrit, en quelque sorte, la puissance du bruit dans une bande passante de 1Hz à toutes les fréquences. Ces unités ne sont pas intellectuellement faciles à appréhender (si je vous demande, « $10^{-27} A^2.Hz^{-1}$, c'est bien ? », vous serez bien en peine de répondre !) et j'utiliserai, sous la même dénomination de densité spectrale, la grandeur $\sqrt{S(f)}$ qui s'exprime en $V.Hz^{-1/2}$, $A.Hz^{-1/2}$, etc.

On parle de bruit blanc quand la densité spectrale est uniforme en fréquence. Dans ces conditions, le bruit n'est pas temporellement corrélé et si on acquiert un signal (du bruit) à un instant donné, il n'a strictement rien à voir avec celui qu'on acquerrait plus tard. Par ailleurs, il ne faut pas confondre la « couleur » du bruit et sa distribution (gaussienne, uniforme, etc.). La « couleur » représente l'évolution fréquentielle du bruit et donc sa corrélation temporelle ; la distribution représente l'histogramme d'amplitude du bruit observé pendant une durée donnée.

L'intérêt de la densité spectrale est qu'elle nous permet très facilement de calculer la valeur efficace de bruit, i.e. l'incertitude de mesure qu'on aurait si on mesurait le bruit à un instant donné. En pratique, la valeur efficace correspond à l'écart-type d'une distribution gaussienne. Ainsi, si mon bruit est gaussien (c'est souvent le cas, mais pas toujours...) et si la valeur efficace de bruit est de $1mV_{RMS}$ (après optimisation), cela signifie que je pourrais faire tout ce que je veux, je n'arriverais pas à mesurer un signal à mieux que $1mV$ près.

La relation entre la densité spectrale et la valeur efficace est la suivante :

$$v_{RMS} = \sqrt{\int_0^{\infty} S(f) \cdot df}$$

Quand on fait passer le bruit de densité spectrale S_{in} à travers un filtre de fonction de transfert H , alors, la densité spectrale de bruit à la sortie du filtre, S_{out} , s'écrit :

$$S_{out} = |H|^2 \cdot S_{in}$$

Enfin, quand on a plusieurs générateurs de bruit décorrélés les uns des autres dont on a calculé (individuellement) la contribution en sortie, alors la densité spectrale résultante au point de mesure est la somme des densités spectrales :

$$S_{out} = \sum S_i$$

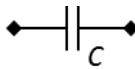
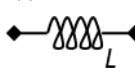
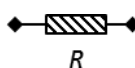

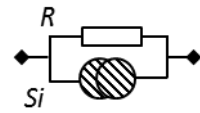
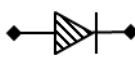
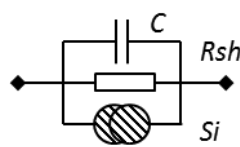
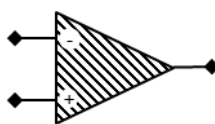
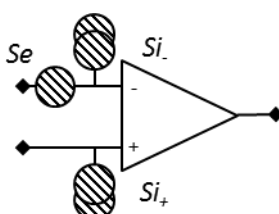
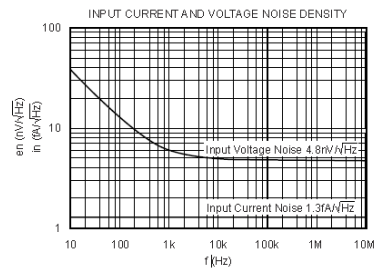
C'est tout ce dont nous avons besoin !

Ainsi, si j'ai un bruit de densité spectrale de $1\text{nV}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ (c'est le bruit d'une résistance de 50Ω) que j'observe à travers un amplificateur de gain 100 de 0 à 1GHz et coupant parfaitement au-delà, la valeur efficace de bruit sera très exactement de $\sqrt{\int_0^{10^9} 10^{-18} \cdot 100^2 \cdot df} = 3,16\text{mV}_{\text{RMS}}$.

7.2.2.2 Bruit des composants électroniques & détecteurs

Nous avons ou allons utiliser divers composants électroniques et détecteurs. Bonne nouvelle, on sait, généralement, exprimer la densité spectrale de bruit qu'ils génèrent !

Dans tout ce qui suit, le composant bruité est représenté avec des hachures. k est la constante de Boltzmann ($1.38 \cdot 10^{-23}\text{J}\cdot\text{K}^{-1}$), e la charge de l'électron ($1.6 \cdot 10^{-19}\text{C}$) et T la température (typ. 300K). Les générateurs de bruit sont blancs, sauf mention contraire.

Composant bruité	Modèle en bruit & commentaires	
Capacité 	Une capacité n'ajoute pas de bruit	
Inductance 	Idem pour l'inductance	
Résistance 	On choisit le modèle que l'on veut, ils sont équivalents.	
		$Se = 4 \cdot kT \cdot R$ $R=50\Omega \rightarrow \sqrt{Se}=0.9\text{nV}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ $R=1\text{k}\Omega \rightarrow \sqrt{Se}=4\text{nV}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$
		$Si = \frac{4 \cdot kT}{R}$ $R=1\text{k}\Omega \rightarrow \sqrt{Si}=4\text{pA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ $R=1\text{M}\Omega \rightarrow \sqrt{Si}=130\text{fA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ $R=1\text{G}\Omega \rightarrow \sqrt{Si}=4\text{fA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$
Jonction 		Rsh est la résistance du shunt (non bruyante). Sa valeur est très généralement très grande et on peut ne pas la représenter. C est la capacité détecteur $Si = 2 \cdot e \cdot I_{rev}$ Où I_{rev} est le courant de polarisation dans le détecteur. $I_{rev}=1\mu\text{A} \rightarrow \sqrt{Si}=560\text{fA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ $I_{rev}=100\text{nA} \rightarrow \sqrt{Si}=180\text{fA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$ $I_{rev}=1\text{nA} \rightarrow \sqrt{Si}=18\text{fA}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$
Amplificateur opérationnel 	 <p>Le générateur de tension est placé indifféremment sur (+) ou (-).</p>	Les générateurs de bruit sont donnés par le constructeur. Par exemple (OPA657) : 

Les chambres à ionisation sont assimilables à des capacités. Même si elles ont un courant inverse, elles ne génèrent pas de bruit par ce mécanisme¹⁸, contrairement aux jonctions pour lesquelles c'est le courant inverse qui conduit à l'apparition du générateur de bruit en courant.

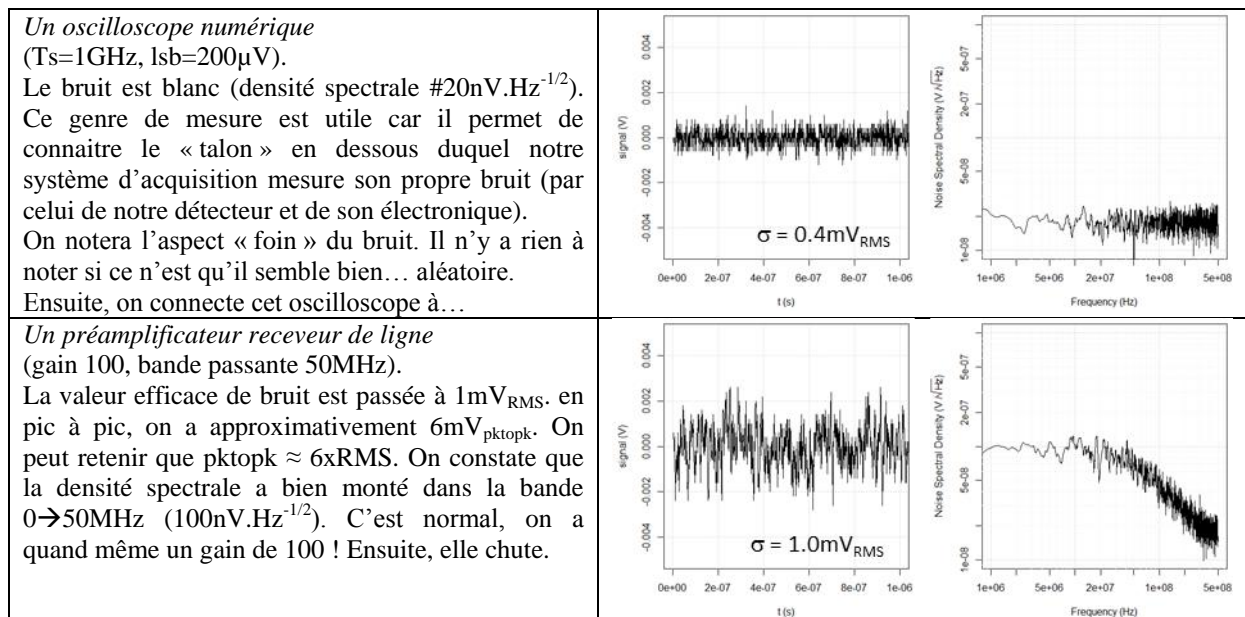
7.2.2.3 Mesurer le bruit

Bien qu'il soit très utile de savoir faire des calculs de bruit, il est encore plus utile de savoir mesurer le bruit. Cela pour deux applications fort courantes. La première étant de bien vérifier que ce que l'on fait est conforme à nos attentes. La seconde est qu'on dispose souvent d'acquisitions de signaux d'expériences dont on ne connaît pas tous les détails d'implantation. Il est alors judicieux de bien comprendre à quel type de bruit on a affaire...

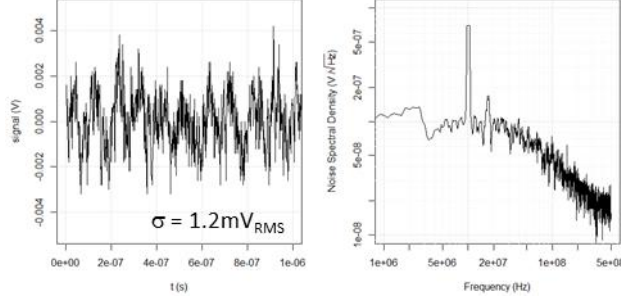
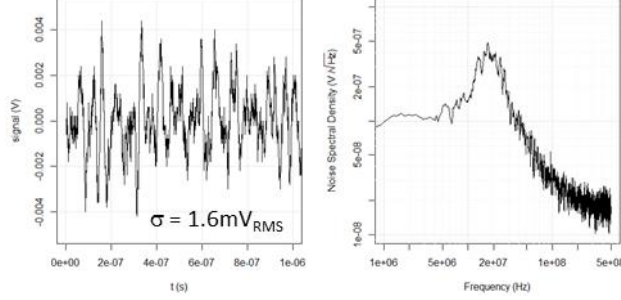
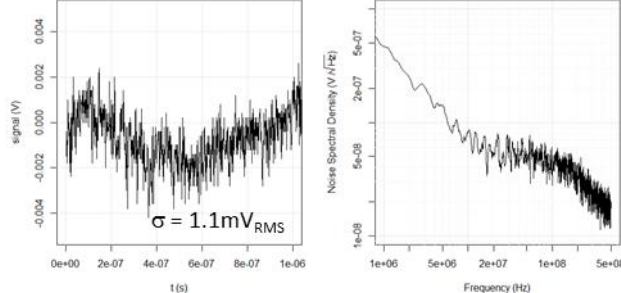
Supposons qu'on ait acquis 1µs de signal échantillonné à 1GHz. Il serait intéressant de mesurer la densité spectrale... Pour cela, on va utiliser une transformée de Fourier (TF) ou tout autre moyen informatique permettant d'accéder au spectre. Cependant, il y a au moins trois types de transformées de Fourier : celle des mathématiciens, celle des physiciens et celle des ingénieurs (elles diffèrent par les coefficients devant l'intégrale) et on ne sait généralement pas celle qui est implantée. Idem quand on utilise une FFT (transformée de Fourier rapide). Il est donc prudent de « calibrer » sa TF favorite.

En **R**, par exemple, la fonction `spectrum` fait parfaitement l'affaire, mais pour disposer de la densité spectrale de bruit, telle qu'elle est définie en instrumentation, il faut prendre quelques précautions. Par exemple, si `s` est le signal échantillonné à `Ts`, alors on exécutera `s.ts <- ts(s, frequency=1/Ts)` pour faire une série temporelle, puis `S <- spectrum(s.ts, spans=5)` pour calculer la densité spectrale (des statisticiens), et enfin, `plot(S$freq, sqrt(2*S$spec))` pour afficher le résultat.

Voici quelques « bruits » typiques et leurs densités spectrales :



¹⁸ Par contre, si une chambre d'ionisation présente un courant inverse, c'est qu'il y a une résistance de fuite quelque part et cette résistance va faire du bruit.

<p><i>Un autre préampli pas très en forme...</i></p> <p>On le devine sur le signal, mais encore mieux sur le spectre, notre préamplificateur traîne avec lui un signal (sinusoïdal) à 10MHz. Il faudrait faire quelque-chose à ce sujet... On remarquera en effet que la bande passante est deux fois plus faible qu'avant, mais on a bien une valeur efficace de bruit supérieure (à cause du pic dans la réponse fréquentielle). → de deux choses l'une, ou bien c'est un problème de CEM (repenser son câblage), ou bien le préamplificateur a un problème plus grave...</p>	
<p><i>Un cas plus fréquent qu'il y paraît...</i></p> <p>On sent bien, en regardant le signal que notre système ne demande qu'à partir en oscillations, tout en ayant du mal à choisir à quelle fréquence exactement. Ce phénomène appelé « ringing » est courant lorsqu'on connecte des préamplificateurs de courant sur des détecteurs un peu « trop » capacitifs. On n'est pas loin de l'oscillateur. Cela résulte généralement d'un mauvais compromis entre le détecteur et son électronique → il est urgent d'aller voir son électronicien favori !</p>	
<p><i>Un bon préamplificateur de charges.</i></p> <p>... va nous produire un « foin » large bande qui va évoluer sur des « vagues » plus lentes (on comprendra pourquoi plus tard). C'est tout à fait normal. Le spectre nous explique qu'il y a une montagne de bruit à basses fréquences, puis un générateur plus étendu.</p>	

Le bruit peut donc présenter plusieurs visages qui sont généralement la signature de l'état de notre chaîne d'instrumentation. Savoir les reconnaître est un exercice utile qui permet de diagnostiquer assez facilement les problèmes avant qu'ils ne surviennent...

7.2.3 Une première approche d'optimisation

A présent, on sait qu'on doit définir, pour chaque problème, la nature de l'information que l'on cherche et on sait faire des calculs de bruit. La démarche qui permet de quantifier les performances d'un circuit (bruyant) est la suivante, en trois étapes :

1. SIGNAL
 - a. On dessine le circuit complet, du point de vue du signal
 - b. On calcule la fonction de transfert du circuit et on la représente.
 - c. On calcule la réponse du circuit au générateur de signal.
2. BRUIT
 - a. On dessine le circuit complet, du point de vue des générateurs de bruit (en éteignant les générateurs de signaux du 1).

Pour chaque générateur de bruit,

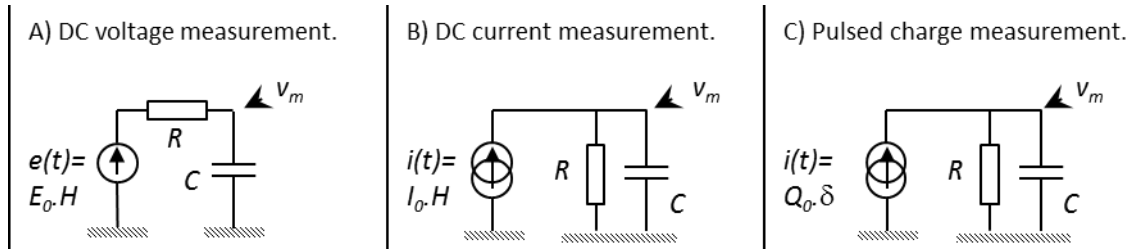
- b. On établit sa densité spectrale (au moyen des éléments donnés plus haut) et on calcule et représente la densité spectrale de bruit au point de mesure.
- c. On calcule la valeur efficace de bruit pour l'ensemble

3. SYNTHESE

- a. On calcule le ENX (quid ?, nous allons voir ci-dessous ce que cela représente)
- b. ...et on conclut.

Nous allons mettre tout cela en musique sur trois problèmes, assez proches les uns des autres et que nous allons traiter en parallèle :

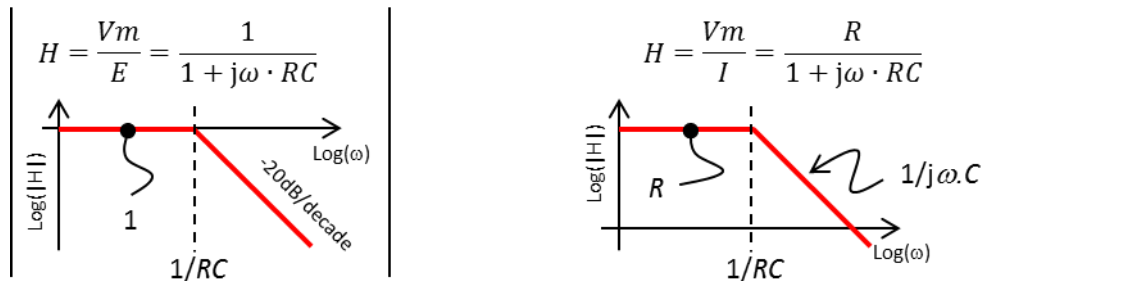
Etape 1.a) on dessine le(s) circuit(s) :



Ces trois circuits sont globalement assez semblables. En A) on cherche à mesurer la tension continue et on la fait passer dans un filtre passe bas ; en B) c'est le même problème, pour un courant continu ; en C) on veut mesurer la charge délivrée par un générateur de courant parfait. Dans tous les cas, le point de mesure est le même. On va acquérir la tension v_m avec un appareil parfait (non bruyant). La question : « Comment dimensionner R et C pour faire cela au mieux ? ».

Etape 1.b) On calcule la fonction de transfert et on la représente

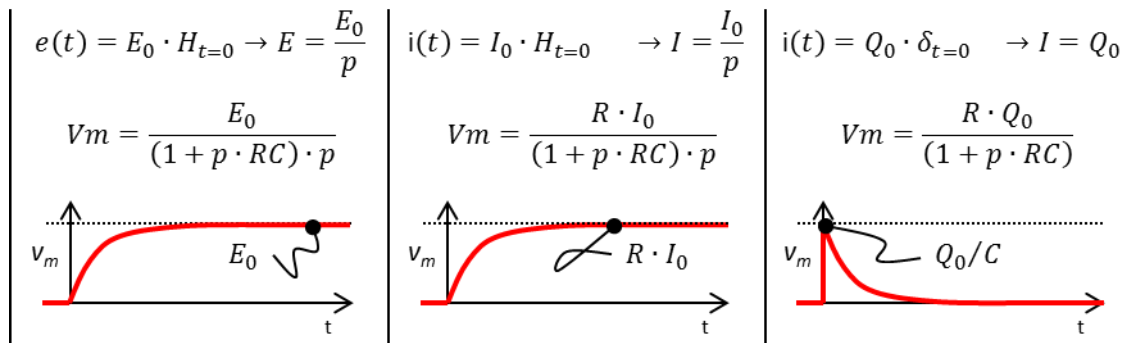
Cela a déjà été fait à plusieurs reprises et le résultat est le même pour B) et C) :



On a des filtres passe-bas du premier ordre (pulsation de coupure $1/RC$). Le gain en tension est unitaire en bande passante pour A). Pour B) et C), le comportement du circuit est assimilable à une résistance R à basses fréquences et une capacité C au-delà de la pulsation de coupure.

Etape 1.C) on calcule la réponse du circuit aux générateurs

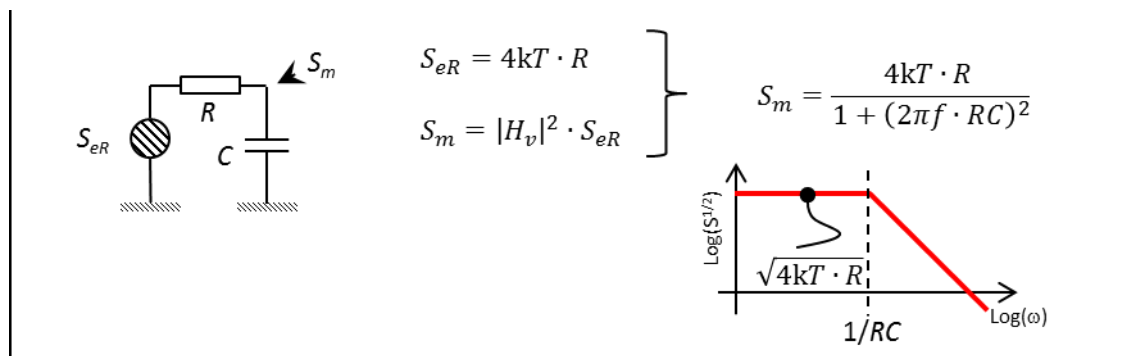
A) et B) sont destinés à des signaux continus. En Laplace, on les modélise par des fonctions de Heaviside. C) est un générateur de charge, c'est une impulsion de Dirac.



On pourrait s'amuser à tirer quelques conclusions dès ce point. Par exemple, pour A), je n'ai rien à faire, le résultat de dépend pas de R ou C . Pour B) on aurait intérêt à augmenter la résistance au maximum et pour C), diminuer la capacité. Hélas, nous allons voir que si dans certains cas, ces conclusions ne sont pas tout à fait exactes, pour d'autres, elles sont parfaitement erronées... Il faut donc calculer le bruit.

Etape 2.a) on fait les schémas en bruit en éteignant les générateurs de signaux.

Pour éteindre un générateur de tension, il suffit de le remplacer par un fil. Pour un générateur de courant, il faut le remplacer par un circuit ouvert. Par conséquent, ces trois circuits ont le même schéma pour ce qui est du bruit !



Etape 2.B) on calcule la contribution des générateurs de bruit au point de mesure et on la représente

C'est déjà fait sur le graphe ci-dessus. Pour les trois circuits, on aurait rigoureusement la même densité spectrale de bruit au point de mesure. Elle vaut $\sqrt{4kT \cdot R}$ et on pourrait se dire qu'il suffit de prendre une résistance faible pour limiter le bruit. C'est tout à fait exact, mais là encore, la conclusion est un peu hâtive...

Etape 2.C) On calcule la valeur efficace de bruit pour tous les générateurs (ici, un seul !)

Le résultat est le même pour les trois circuits et il vaut :

$$v_{RMS} = \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{4kT \cdot R}{1 + (2\pi f \cdot RC)^2} \cdot df} = \sqrt{\frac{kT}{C}}$$

On remarque que, même si la capacité ne fait pas de bruit, elle filtre le bruit. Il est donc naturel de la voir réapparaître ici. Il ne faudrait pas conclure qu'on a intérêt à l'augmenter au maximum quand même !

Etape 3.a) on calcule les ENX

Les *ENX*, ce sont en fait le « bruit ramené à la grandeur mesurée » (par exemple, si je mesure une charge, l'ENC est « la charge équivalente en bruit »). C'est applicable dans tous les domaines de l'instrumentation et c'est à la fois élégant et informatif. L'idée est la suivante. Comment quantifier les performances en bruit d'un système ? En général, on utilise le rapport signal à bruit, mais si je dis, « j'ai un rapport signal à bruit de 10^6 », c'est certainement très impressionnant, mais cela correspond-il à votre application ? Rien n'est moins sûr. Si par contre, je vous affirme que mon appareil présente une charge équivalente en bruit de $10\text{keV}_{\text{RMS}}$, c'est déjà mieux. Vous souhaitez mesurer une charge. Si votre application nécessite de mesurer 1MeV , tout va bien (ou pas suivant vos besoins) et vous aurez un rapport signal à bruit de 100.

En pratique, on a fait tout le travail qui nous permet de calculer la tension équivalente en bruit (*ENV*), le courant équivalent en bruit (*ENI*) ou la charge équivalente en bruit (*ENC*). Voici comment faire :

- On a évalué la sensibilité (étapes 1) du dispositif, exprimant la tension (mesurée) pour une excitation donnée ($X = E_0, I_0$ ou Q_0) sous la forme $v_m = k \cdot X$
- On a calculé la valeur efficace de bruit à la sortie du système, v_{RMS} .
- Le *ENX* (*ENV*, *ENI* ou *ENC*) vaut : $ENX = \frac{v_{\text{RMS}}}{k}$.

$$\left| \begin{array}{l} v_m = E_0 \\ ENV = \sqrt{\frac{kT}{C}} = \sqrt{kT \cdot \frac{R}{\tau}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{kT}{C}} \\ v_m = R \cdot I_0 \\ ENI = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{\frac{kT}{C}} = \sqrt{kT \cdot \frac{1}{R \cdot \tau}} \end{array} \right| \left| \begin{array}{l} v_m = Q_0/C \\ ENC = \sqrt{kT \cdot C} \end{array} \right|$$

On a exprimé ci-dessus les *ENV* et *ENI* en fonction des composants du circuit et de son temps de réponse ($\tau = RC$). Pour la mesure de charge, *ENC*, on attrape le maximum du signal, on ne s'intéresse donc pas fondamentalement à la bande passante. Maintenant, on peut conclure !

Etape 3.b) Conclusions

Pour une bande passante donnée (on veut par exemple faire des mesures toutes les secondes. Il faut donc que τ soit beaucoup plus petit (disons $\tau = 100\text{ms}$). Alors,

- Si on veut mesurer une tension, (cas A) il est conseillé de disposer de capteurs dont la résistance interne est la plus faible possible. Par exemple, si la résistance vaut 50Ω , la tension équivalente au bruit est de $1,5\text{nV}_{\text{RMS}}$.
- Si on veut mesurer un courant, (cas B), alors, il faut une résistance (d'entrée par exemple) la plus grande possible. Si on a la possibilité de disposer d'une résistance de $100\text{M}\Omega$, par exemple, le courant équivalent en bruit est de l'ordre de 20fA_{RMS} .
- Si on veut mesurer proprement une charge, (cas C), alors, il faut absolument minimiser la capacité détecteur ! Si notre détecteur a une capacité de 10pF , alors la charge équivalente en bruit vaut $0,2\text{fC}_{\text{RMS}}$, soit $1300\text{q}_{\text{RMS}}$ (1300 paires créées dans le détecteur).

On comprend maintenant pourquoi, dans nos problèmes d'instrumentation nucléaire (mesure de charge et éventuellement de courant), il est absolument vital de n'avoir que des hautes impédances (très grandes résistances et très petites capacités) dans l'environnement immédiat de l'électrode de mesure.

7.3 De l'usage des préamplificateurs

La chaîne d'instrumentation sert avant tout à extraire une information d'un signal produit dans le détecteur. En écrivant cela, nous n'avons pas beaucoup avancé. Le détecteur produit des signaux (impulsionnels) qu'il faut traiter. Dans le cas le plus défavorable, ces signaux sont de faible amplitude et nous avons des problèmes de bruit. Or, il faut bien transformer ces signaux en tension pour pouvoir les acquérir. Il y a donc nécessairement un élément actif derrière le détecteur (dans les exemples ci-dessus, c'était l'instrument qui mesurait la tension et que nous avons supposé idéal). Cet élément actif, un amplificateur opérationnel ou un transistor, par exemple, va nécessairement ajouter ses générateurs de bruit au signal. Il va donc dégrader l'information. Dès lors, comment faire pour limiter cette dégradation ? De plus, cet élément actif va être suivi par d'autres dispositifs qui vont eux-mêmes ajouter leurs générateurs de bruit. Comment faire pour limiter le bruit dans la chaîne et pouvoir enfin se concentrer sur la fonction à réaliser ?

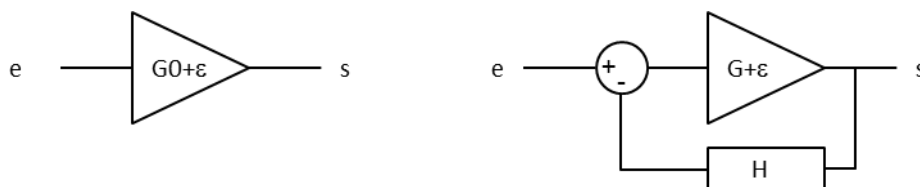
En pratique, on va toujours procéder de la façon suivante :

- Le détecteur a ses propriétés propres (signal & bruit).
- On lui ajoute un préamplificateur qui va sortir le signal du bruit (typiquement, il suffit que le gain soit de quelques dizaines sur toute la bande passante signal utile). On sélectionne attentivement le préamplificateur en fonction de la nature des signaux du détecteur :
 - « forts », on n'a pas de problème et on peut se concentrer sur la préservation de la forme d'impulsion,
 - « faibles », c'est le critère de bruit qui prédomine, peu importe la fonction réalisée. On pourra toujours la corriger ultérieurement.
- On finalise la chaîne pour obtenir l'information, compte tenu du type de préamplificateur choisi.

7.3.1 Pourquoi la contre-réaction ?

La contre-réaction, en électronique, a été inventée par H. S. Black dans les années 1930. Admettons qu'on ait besoin d'un amplificateur de gain en tension égal à 100. On sait faire cet amplificateur (en boucle ouverte), mais ses performances seront généralement médiocres. Il présentera des problèmes de linéarité et le gain va dépendre d'une multitude de paramètres difficiles à contrôler...

Imaginons qu'on veuille amplifier un signal e d'un gain $G0$. Le schéma fonctionnel de gauche nous donnerait $s = (G0 + \epsilon) \cdot e$ avec une dépendance au premier ordre de la sortie aux effets non contrôlés, matérialisés ici pas le paramètre ϵ .



Un amplificateur de gain G plus élevé présenterait exactement les mêmes problèmes, mais... Dans le même temps, on sait réaliser certaines fonctions H , sans gain (à l'aide de composants passifs, cette fois), quasi parfaites. L'idée qu'a explorée Black est la suivante : Que se passerait-il si on contre-réactionnait un « mauvais »

amplificateur de très grand gain ($G \gg G_0$) avec une bonne fonction de transfert (schéma fonctionnel de droite)? On obtiendrait le résultat suivant :

$$s = \frac{(G + \varepsilon) \cdot e}{1 + (G + \varepsilon) \cdot H} \approx \frac{e}{H}$$

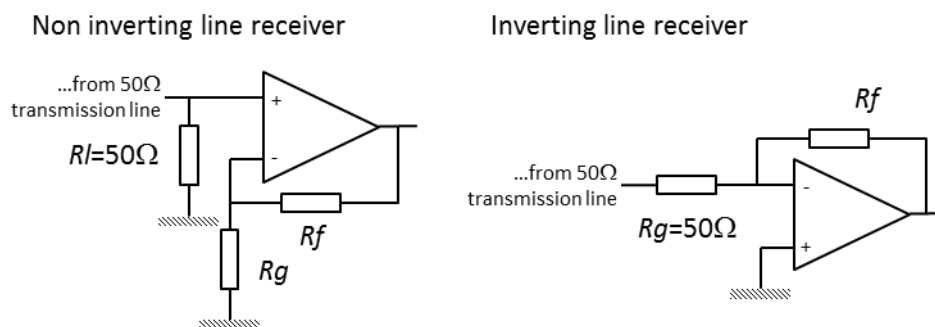
Et si on prend $H = 1/G_0$, (i.e. on prélève $1/G_0$ de la tension de sortie), alors, la sortie ne dépend plus des défauts de l'élément actif (l'amplificateur). Accessoirement, ici, H est un simple diviseur potentiométrique (deux résistances !).

Les avantages de la contre-réaction sont valables dans tous les domaines, en physique¹⁹, biologie, médecine, etc... La contre-réaction améliore toujours la stabilité des systèmes et limite leurs imperfections (quand elle est bien conçue, évidemment) ! En mesure, la boucle ouverte, c'est pas bien ! Contre-réactionner (intelligemment) est un réflexe de survie.

7.3.2 Trois types de préamplificateurs très spécifiques

Les préamplificateurs de courant : ils réalisent la fonction $v_s = R \cdot i$ sur la plus large bande passante possible. C'est très précisément ce dont on aurait besoin. Ceci étant, ils ont deux problèmes majeurs qui rendent leur usage et/ou leur développement délicat. En premier lieu, la réalisation de cette fonction de transfert nécessite la présence d'une résistance de contre-réaction qui va ajouter du bruit. Ensuite, leur comportement est particulièrement instable et dépend d'ajustements très rigoureux entre le détecteur et son électronique. On les trouve très peu dans l'arsenal de l'instrumentation nucléaire.

Les préamplificateurs receveurs de ligne : ils réalisent la fonction $v_s = G \cdot v_e$ (où G est le gain) sur la plus large bande passante possible et ils sont adaptés 50Ω en entrée. On peut donc négliger l'éventuel câble qui lierait le détecteur au préamplificateur. Nos sources sont des générateurs de courant parfaits, on mesure donc $v_s = G \cdot 50\Omega \cdot i$ et on peut les utiliser comme préamplificateurs de courant. Attention cependant, leurs performances en bruit les cantonnent aux signaux de forte amplitude (sur des tubes photomultiplicateurs, des MPPC, etc...). Les schémas ci-dessous présentent deux intégrations usuelles de préamplificateurs receveurs de ligne. A gauche, la structure directement basée sur la contre-réaction évoquée plus haut (où l'on reconnaît parfaitement le diviseur potentiométrique), à droite une approche plus efficace en termes bruit et de bande passante (le diviseur est toujours là et il est mis à profit pour réaliser l'adaptation d'impédance) :



Dans leur bande passante, les receveurs de ligne opèrent un gain en tension égal à R_f/R_g . Cette même bande passante est définie (dans les schémas ci-dessus) par un paramètre qu'on appelle le *produit gain x bande* de l'amplificateur opérationnel (GBP pour Gain-Band Product). Celui-ci définit assez clairement les

¹⁹ La calibration d'une manip EST une contre-réaction. Elle est assez faible lorsqu'on la réalise au début ou en fin d'expérience, et elle prend de la puissance si on peut l'opérer en temps réel pendant les runs.

performances qu'il est possible d'atteindre avec l'amplificateur opérationnel choisi. Il est toujours spécifié dans les documentations constructeur). Un fois bouclé, le produit *gain en tension* x bande passante *effective* est égal au GBP. On trouve sur le marché, et on sait fabriquer, des amplificateurs de GBP supérieurs à quelques GHz. Si on les câble pour obtenir un gain de 10, par exemple, leur bande passante sera de GBP/10, soit, typiquement de quelques dizaines de MHz à quelques centaines de MHz. Si on a besoin de moins, il suffit de filtrer passe-bas. Si on veut plus, il faut abandonner la contre-réaction et travailler, à grand risques, avec des amplificateurs spécifiques en boucle ouverte.

Les préamplificateurs de charges : spécifiquement adaptés aux signaux faibles puisqu'ils ajoutent le minimum de bruit²⁰. Ils réalisent approximativement la fonction $v_s = \frac{i}{p \cdot C}$. Ce sont des intégrateurs de courant et ils sont donc sensibles à la charge. Ils ne sont généralement pas adaptés en entrée (sauf cas exceptionnels, en ajustant le gain en boucle ouverte et la capacité de contre-réaction pour définir une impédance d'entrée proche de la valeur désirée, du grand art !) et il convient, comme nous l'avons déjà expliqué, de minimiser la longueur de câble entre le détecteur et le préamplificateur. Notons un point de détail visible sur le schéma ci-dessous. On trouvera systématiquement, en parallèle de la capacité de contre-réaction, une résistance. Celle-ci a pour objectif de faire retourner le signal de sortie naturellement vers 0V (sinon, il finit inévitablement par saturer à la valeur d'alimentation de l'amplificateur opérationnel). Cette résistance ajoute du bruit et il convient de la prendre la plus grande possible.

La fonction de transfert (courant vers tension) qu'ils réalisent vaut précisément :

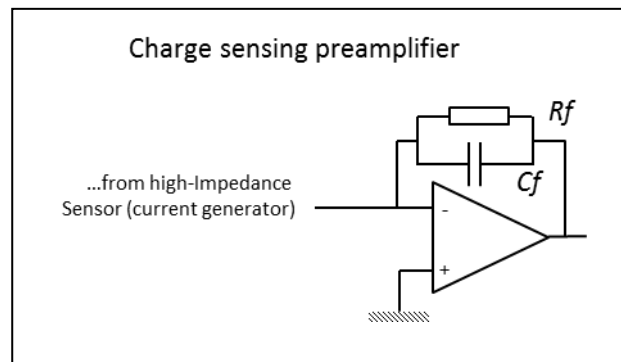
$$\frac{v}{i} = \frac{Rf}{1 + p \cdot RfCf}$$

En régime impulsionnel, celle-ci vaut donc approximativement $\frac{v}{i} = \frac{1}{p \cdot Cf}$. Pour une impulsion de

courant $i = Q\delta$, on obtient donc un créneau de tension qui monte à Q/Cf puis redescend tranquillement vers 0V, de façon exponentielle, avec la constante de temps $\tau = RfCf$. On a donc un signal du type :

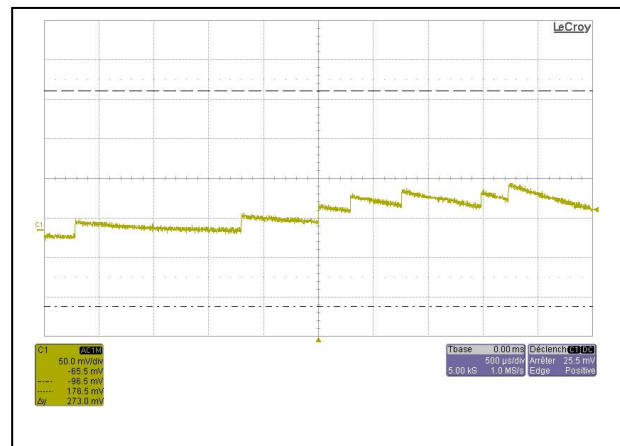
$$v = \frac{Q}{Cf} \cdot \exp\left(-\frac{t}{RfCf}\right)$$

La capacité de contre-réaction est généralement choisie dans la gamme du picofarad (typ. 1 à 10pF) et la résistance la plus grande possible (typ. MΩ à GΩ), ce qui produit des constantes de temps de la microseconde à la milliseconde. Pour une application donnée, plus grande est la résistance de contre-réaction, meilleures seront les performances en bruit, comme nous le verrons plus loin.



²⁰ Les préamplificateurs de charges de classe nucléaire ne sont pas généralement construits avec des amplificateurs opérationnels pour des raisons de bruit. Ils sont en réalité constitués d'un demi ampli-op. On économise ainsi la moitié du générateur de bruit en tension. Par ailleurs, le transistor d'entrée est rigoureusement sélectionné pour produire le moins de bruit possible. C'est long et coûteux, mais c'est à ce prix qu'on dispose d'électroniques dont les performances sont proprement exceptionnelles. Une excellente chaîne d'instrumentation peut mesurer des charges à une quarantaine d'unités près ! Pour ce qui nous intéresse dans ce document, nous continuerons à utiliser des schémas à amplificateur opérationnels, car ils sont plus faciles à comprendre et accessoirement, on sait faire de relativement bons préamplificateurs de charges avec des amplificateurs opérationnels du marché qui ne coutent que quelques €.

L'empilement d'impulsions, comme cela est visible sur la capture d'oscilloscope ci-contre est un comportement naturel qui ne doit pas alarmer. Les électroniques que l'on connecte après le préamplificateur de charges sont faites pour travailler dans ces conditions. Le point important est de ne jamais empiler jusqu'à atteindre la tension d'alimentation des amplificateurs opérationnels.



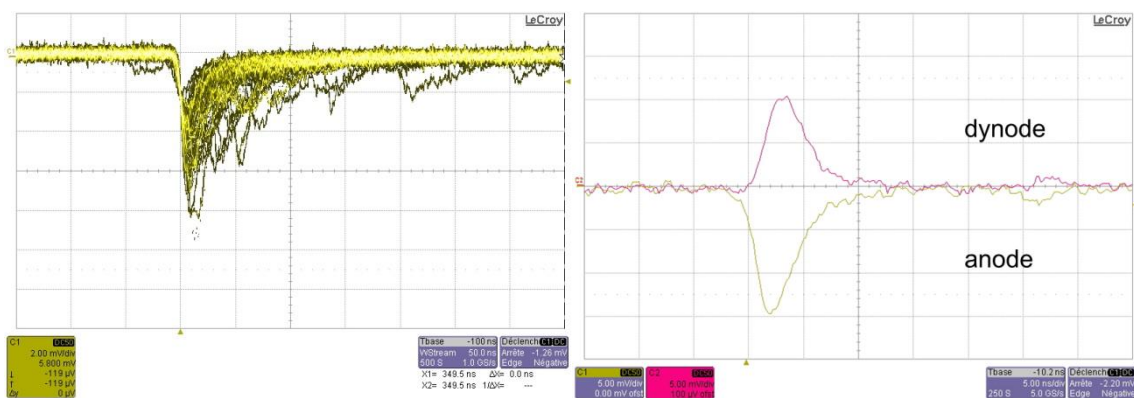
8 Traitement du signal

Nous avons à présent tous les éléments nécessaires pour finaliser la chaîne d'instrumentation. Nous savons comment sont produits les quanta primaires, comment leur transport produit du courant dans notre détecteur et comment conditionner proprement ce courant. Reste à l'exploiter pour mesurer l'énergie déposée, l'instant de passage d'une particule, identifier cette dernière, etc...

En réalité, nous n'avons fait qu'une partie du chemin en nous « contentant » d'éviter de dégrader l'information issue de notre détecteur. Une question se pose : ne peut-on pas faire un peu mieux que cela ? Et la réponse à cette question est complexe. Elle dépend de la nature des signaux, de la nature du bruit et de ce que l'on veut mesurer précisément. Nous allons aborder les paragraphes suivants en progressant par ordre de complexité. Nous commencerons par étudier les signaux homothétiques en présence de bruit blanc (typ. compteurs proportionnels, par exemple), puis nous examinerons les signaux à support aléatoire (typ. les scintillateurs) et nous terminerons sur les signaux homothétiques en présence de bruit coloré (typ. les détecteurs solides).

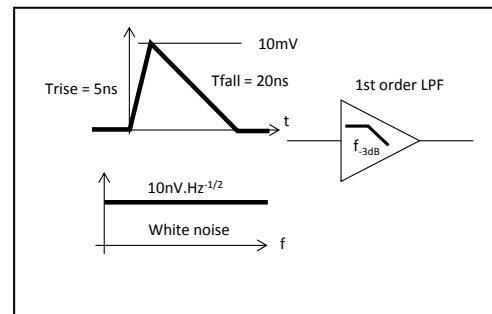
8.1 Signaux homothétiques en présence de bruit blanc

On va trouver, dans cette classe de signaux, tous les détecteurs gazeux autoamplifiés (compteurs proportionnels, GEM, MWPC, PPAC, etc) et les photodétecteurs pour la détection de photons uniques (PM, SiPM, APD, etc). Ces détecteurs peuvent éventuellement être suivis d'un préamplificateur receveur de ligne ou un préamplificateur de courant. Le traitement des signaux issus de scintillateurs fera l'objet d'un chapitre à part. Voici quelques exemples de signaux, à gauche, la sortie d'un compteur proportionnel, à droite, un photoélectron unique extrait d'un tube photomultiplicateur (dynode et anode) :



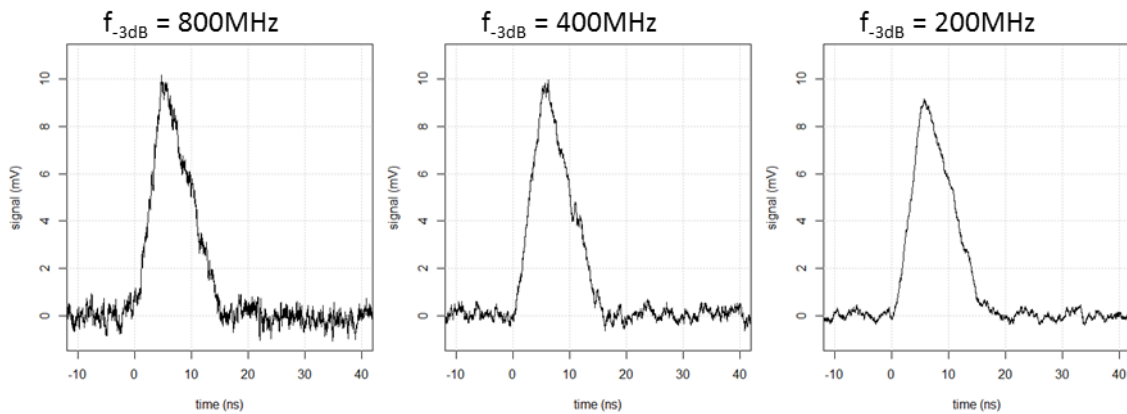
8.1.1 Quelques aspects qualitatifs

Nous allons traiter ici des signaux homothétiques en présence de bruit blanc (densité spectrale, $10\text{nV}\cdot\text{Hz}^{-1/2}$) gaussien. Pour fixer les idées, notre signal test sera un signal triangulaire (temps de montée, 5ns, temps de descente, 10ns, amplitude 10mV) que nous supposons passé à travers un filtre passe-bas du premier ordre (fréquence de coupure variable).



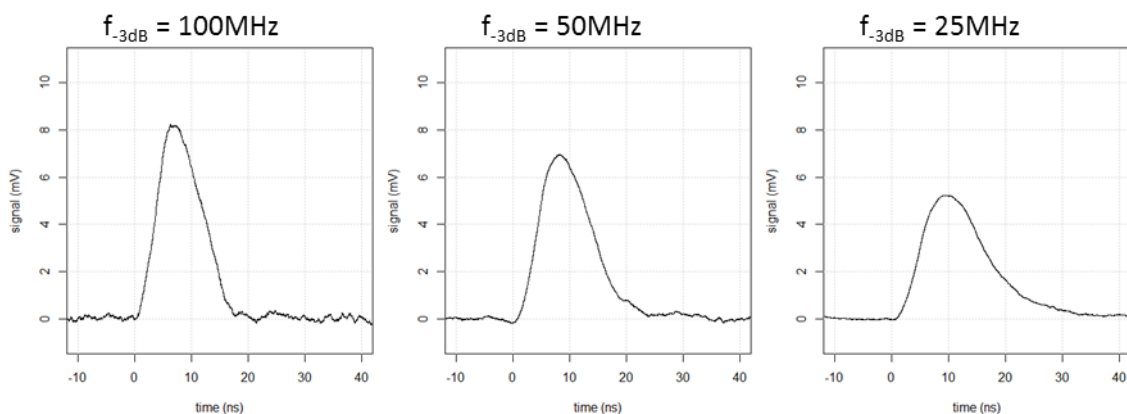
8.1.1.1 Signaux et filtrage

En changeant la bande passante de notre filtre passe-bas du premier ordre, nous observerions les phénomènes suivants :



L'amplitude du signal ne dépend pas sensiblement de la fréquence de coupure. Sa forme est très bien conservée. Le bruit diminue.

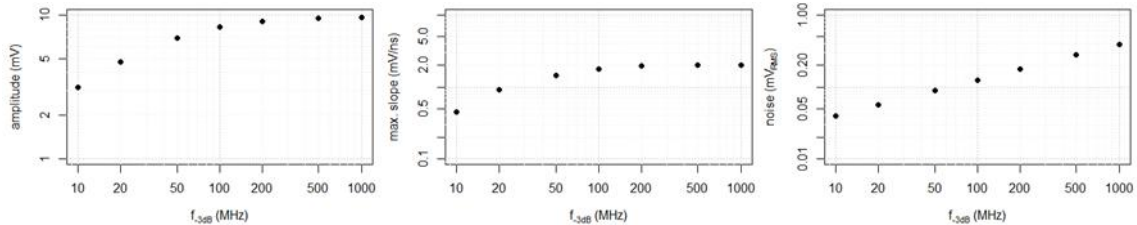
Si nous diminuons encore la fréquence de coupure, les formes changent un peu :



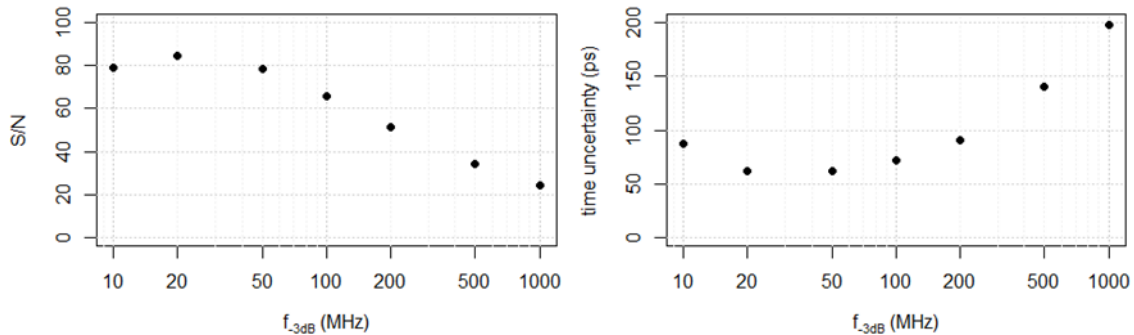
L'amplitude du signal diminue sensiblement avec la bande passante ; le bruit aussi. En dessous d'une centaine de MHz, la forme du signal est affectée. Une fréquence de coupure de 100MHz correspond à une constante de temps de réponse de 1,6ns ($\tau = 1/2\pi \cdot f_{-3dB}$) qui n'est plus sensiblement grande devant les temps d'inflexion du signal (particulièrement au sommet).

On notera cependant que le filtrage passe-bas n'affecte pas la surface des impulsions (celle-ci est rigoureusement conservée).

Pour affiner un peu la compréhension du problème, on peut s'intéresser quantitativement à quelques observables du signal, à savoir, l'amplitude (à gauche), la pente maximale (au centre) et la valeur efficace de bruit (à droite). Les graphes ci-dessous résument les informations qualitatives exposées plus haut :



A partir de là, on peut tracer le rapport signal à bruit et, par exemple, l'incertitude temporelle qu'on pourrait espérer atteindre lorsque la pente du signal est maximale. On verra plus loin qu'elle vaut : $\sigma_t = \frac{v_{RMS}}{dv/dt}$:



On peut à présent noter quelques éléments intéressants. Ils ne sont pas définitifs comme nous le verrons plus loin, mais ils illustrent la démarche :

1. Il y a toujours un optimum. Celui-ci apparaît quand la bande (passante) de bruit est adaptée à la bande signal. (vers 20MHz pour la mesure d'amplitude et 30MHz pour le temps).
2. Cet optimum est assez large. Si on se « trompe » d'une octave (i.e. d'un facteur 2), les incertitudes ne varient guère plus de 10%.
3. En tout état de cause, travailler en « large bande » (i.e., sans ajuster la bande de bruit à la bande signal) donne de beaucoup moins bons résultats, même si les signaux sont moins déformés...

Bien entendu, il faut refaire cette étude pour chaque type de signaux, donc spécifiquement pour chaque type de détecteur, mais les grandes lignes sont là. Comme d'habitude, il faut réfléchir à l'objectif et adapter les moyens (simples) de filtrage pour l'atteindre, mais on en tire un grand bénéfice sur la résolution finale de notre instrument.

8.1.2 Mesure de charge

Partant des considérations évoquées ci-dessus, on pourrait se poser la question suivante : existe-t-il un filtre qui nous permette d'avoir le meilleur rapport signal à bruit possible ? Il s'agit bien d'un problème d'optimisation et nous allons voir que, oui, ce filtre existe. Cela nous permettra ensuite de quantifier les performances de méthodes moins exotiques. Notons en premier lieu que, pour des signaux rigoureusement homothétiques (hypothèse forte), la mesure de l'amplitude est proportionnelle à la mesure de la charge.

8.1.2.1 Le filtrage optimal

Pour trouver le filtre optimal, la démarche est toujours la même. On définit le signal, on définit le bruit et on trouve le filtre qui maximise le rapport signal à bruit. Nous allons illustrer cette démarche en filtrage numérique²¹, par exemple. Pour faire encore plus simple, nous allons ici chercher un filtre à réponse impulsionnelle finie. Nous avons exprimé plus haut la sortie d'un filtre sous la forme d'une équation aux différences finies liant entrée et sortie en disant qu'il s'agissait d'un filtre à réponse impulsionnelle infinie. Le filtre à réponse impulsionnelle finie est encore plus simple. Il s'écrit :

$$S[n] = \sum_{i=0..N} a_i \cdot E[n - i]$$

Ces filtres sont inconditionnellement stables. C'est pour cette raison qu'ils sont parfois préférés aux filtres récursifs dont la conception est plus « délicate ». Déroulons maintenant la démarche :

Supposons qu'on veuille détecter un signal dont la forme temporelle est connue et vaut $E^*[i = 0..N]$ tel que celui présenté plus bas (ici, $N=30$, notre filtre contiendra donc 31 coefficients). E^* désigne ici la forme générale de nos impulsions. En pratique, elles auront toutes des amplitudes variables $E_i = A_i \cdot E^*$, mais ici, seule la forme compte.

1. On calcule la sortie du filtre quand le signal est passé, i.e. à l'instant $n = 30$, soit :

$$S[30] = \sum_{i=0..N} a_i \cdot E^*[30 - i]$$

On remarque ici que l'entrée est la version temporellement inversée du signal à mesurer, c'est-à-dire, dans l'ordre dans lesquelles les valeurs du signal vont se présenter.

2. On écrit le bruit mesuré à la sortie du filtre. Pour cela, il convient de se rappeler une hypothèse fondamentale : le bruit est blanc. Par conséquent, les échantillons sont tous décorrélés les uns des autres et la valeur efficace de bruit vaut simplement :

$$v_{RMS} = \sqrt{\sum_{i=0..N} a_i^2 \cdot \sigma^2} = \sigma \cdot \sqrt{\sum_{i=0..N} a_i^2}$$

Où σ est la valeur efficace de bruit à l'entrée.

3. On écrit le rapport signal à bruit :

$$\frac{S}{B} = \frac{\sum_{i=0..N} a_i \cdot E^*[30 - i]}{\sigma \cdot \sqrt{\sum_{i=0..N} a_i^2}}$$

Ici, on cherche le vecteur \vec{a} des coefficients a_i qui va maximiser le rapport S/B . On peut donc l'écrire sous forme vectorielle :

²¹ Tout simplement parce que le résultat est plus simple à établir dans le domaine échantillonné. Bien entendu, les conclusions sont tout à fait valables dans le domaine continu !

$$\frac{S}{B} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{E}_{-1}^*}{\sigma \cdot |\vec{a}|}$$

Où \vec{E}_{-1}^* est le vecteur du signal d'entrée inversé dans le temps. L'expression ci-dessus se simplifie encore :

$$\frac{S}{B} = \frac{|\vec{E}_{-1}^*|}{\sigma} \cdot \cos(\theta)$$

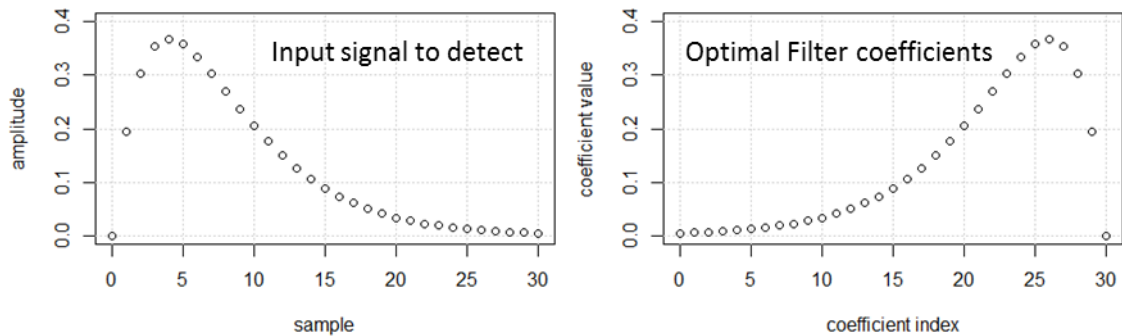
Où θ est l'angle que forment nos deux vecteur, \vec{a} et \vec{E}_{-1}^* . On se rappelle que le produit scalaire est maximal quand les vecteurs sont colinéaires. Pour maximiser S/B , il suffit donc de choisir

$$\vec{a} = \vec{E}_{-1}^*$$

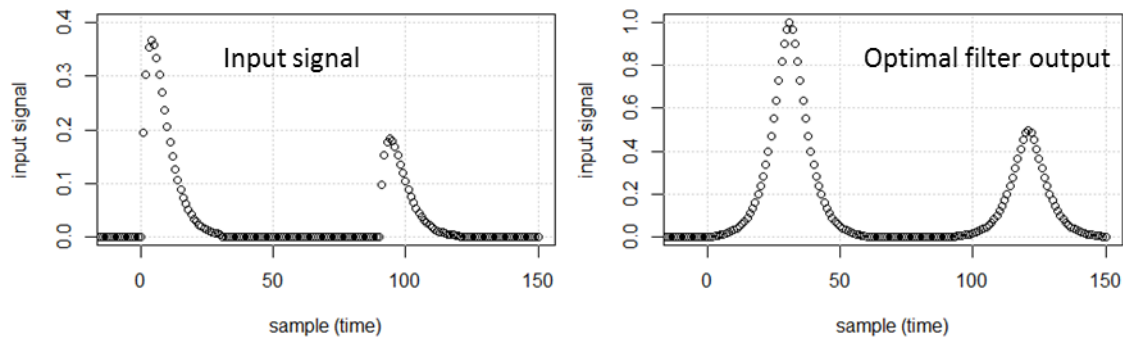
Soit :

$$a_i = E^* [30 - i]$$

Et on a fini ! Mettons tout cela en pratique. A gauche, le type de signal sortant du détecteur, à droite, les coefficients du filtre optimal. C'est le signal inversé dans le temps :



Ensuite, on applique le filtre qu'on vient de calculer. A gauche, le signal original (deux impulsions), à droite, le signal après filtrage optimal :



L'acquisition reviendrait ici à prendre l'amplitude maximale de chaque impulsion détectée (soit ici, 1 et 0.5).

Calculons maintenant les performances de la chaîne. Pour cela, admettons que le signal corresponde à un dépôt d'énergie de 1MeV (l'amplitude maximale vaudrait ici 368mV) et qu'il y ait 1mV_{RMS} de bruit sur les échantillons d'entrée. A la sortie du filtre optimal, le signal fait maintenant 1V et le bruit fait (encore) 1mV_{RMS} (on applique simplement le point 2 ci-dessus). On a donc amélioré le rapport S/B d'un facteur environ égal à 3. N'en doutez pas, il n'y a plus rien à faire ! Le filtre est optimal pour la mesure d'énergie.

La charge équivalent en bruit vaudrait donc ici 1mV_{RMS} / 1V x 1MeV = 1keV_{RMS}.

On remarquera que la largeur d'impulsion à la base, à la sortie du filtre optimal, est plus grande que celle du signal original. Tout a un coût...

8.1.2.2 Comparaison à la pratique

On saurait fabriquer ce filtre²², mais on peut aussi se demander comment se placent des filtres plus faciles à réaliser, ou d'autres approches, par rapport à lui.

Pour cela, il suffit de calculer le rapport signal à bruit du filtre qui nous intéresse, $S/B_{myfilter}$, et de le comparer aux performances du filtre optimal S/B_{∞} définies ci-dessus en mesurant le gain en rapport signal à bruit :

$$G = \frac{S/B_{myfilter}}{S/B_{\infty}}$$

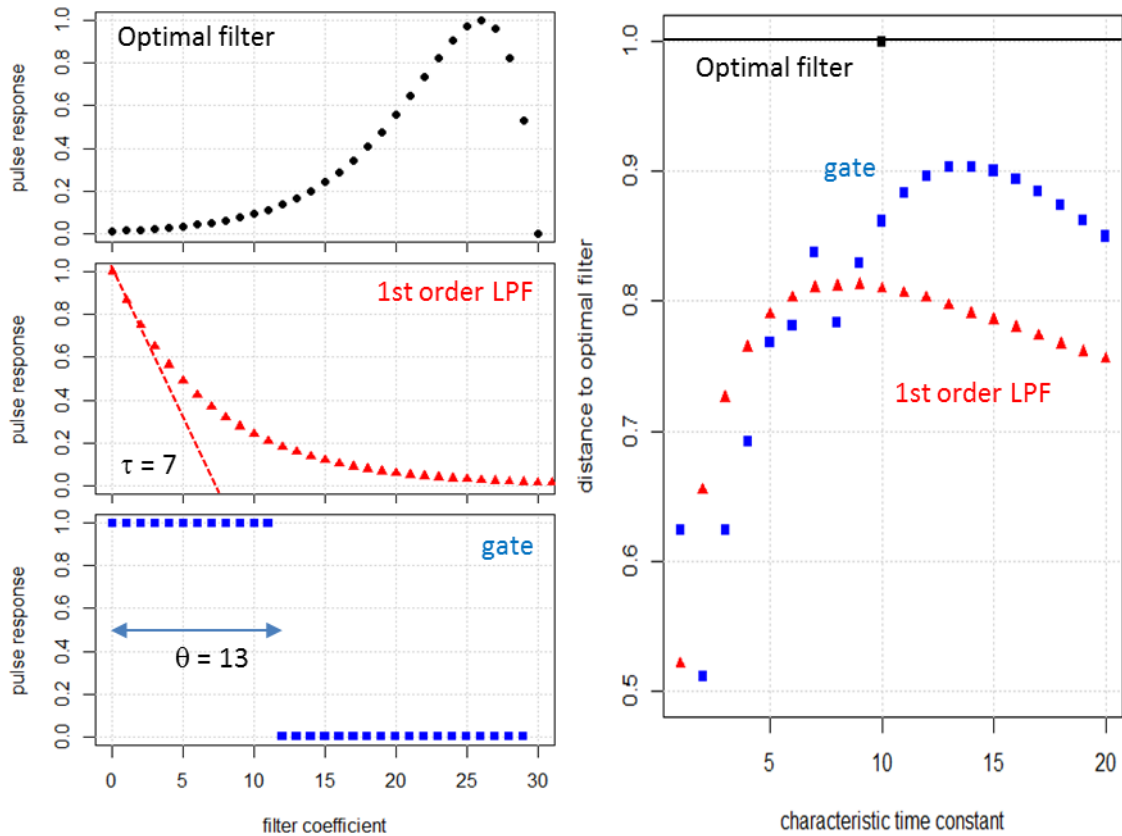
On connaît à présent les performances du filtre optimal pour la mesure d'énergie.

On va étudier le passage de notre signal à travers un filtre passe-bas du premier ordre dont on va faire varier la constante de temps (exprimée ici en échantillons par pure commodité). On prend alors le maximum du signal ().

Une autre approche encore plus classique consiste à détecter l'impulsion et l'intégrer sur la durée d'une porte (exprimée également en nombre d'échantillons), puis à prendre le résultat à la fin de la porte (). En pratique, on placerait cette porte symétriquement par rapport au sommet de l'impulsion, puis lorsque sa durée deviendrait trop longue (et qu'elle démarrerait avant le signal), on la continuerait vers les temps plus longs. Pratiquement, réaliser l'intégration d'un signal sur un nombre d'échantillons donnés revient à passer ce signal dans un filtre dont les coefficients sont tous égaux à 1 sur la durée de la porte.

Les réponses impulsionnelles de ces différentes approches sont en colonne de gauche. Leurs gains en rapport signal à bruit est en colonne de droite :

²² numériquement, en tous cas. En électronique analogique, il n'est pas facile de faire un filtre dont la réponse impulsionnelle démarre plus lentement qu'elle finit.



On constate, bien entendu, que le filtre optimal donne les meilleurs résultats. Le filtre passe-bas du premier ordre est à $\approx 80\%$ du filtre optimal, ce qui n'est pas si mal pour un objet aussi simple. L'intégration sur une porte permet d'atteindre $\approx 90\%$ des performances du filtre optimal (les premières « oscillations » sont liées à l'échantillonnage).

Bien entendu, les réglages en question ne sont valables que pour le signal utilisé pour cette étude. Mais les grandes lignes sont là et nous allons les résumer dans le paragraphe suivant.

8.1.2.3 Ce qu'il faut retenir

En règle générale, il existe toujours un filtre optimal (qui améliore le rapport signal à bruit). Lorsque les signaux sont homothétiques en amplitude, et en présence de bruit blanc, le filtre optimal a pour réponse impulsionnelle $h_{\infty}(t)$, le signal inversé dans le temps $e(-t)$. Ceci a été démontré dans le domaine échantillonné et ça reste valable dans le domaine continu :

$$h_{\infty}(t) = e(-t)$$

On peut toujours approcher les performances du filtre optimal au moyen d'autres filtres (passe-bas du premier ordre, porte d'intégration, etc...). Ces filtres ont toujours un réglage optimal qu'il faut établir pour le cas particulier des signaux d'entrée.

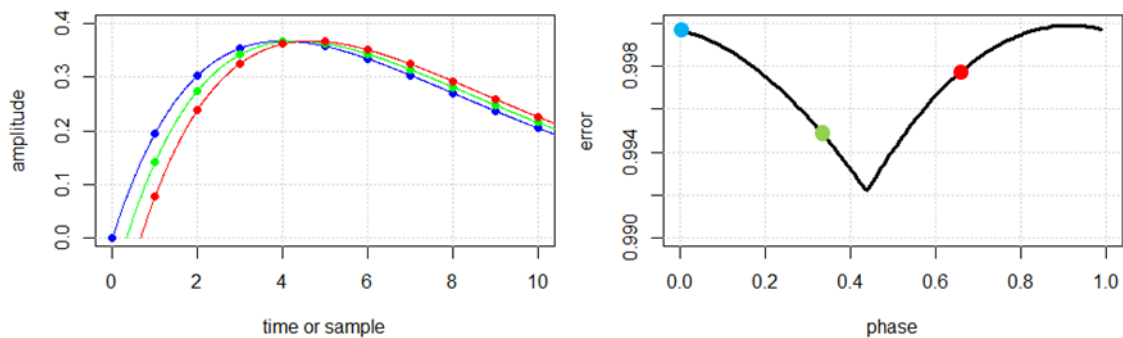
Un « simple » filtre passe-bas du premier ordre permet de s'approcher à $\approx 80\%$ des performances du filtre optimal. L'intégration sur une porte (QDC) atteint $\approx 90\%$ des performances du filtre optimal.

Le réglage « fin » des paramètres temporels du filtre n'est pas fondamentalement critique. On constate généralement une dégradation de l'ordre de 5% à 10% des performances si on divise ou multiplie par deux le temps optimal.

Le filtre optimal EST... optimal. Aucune autre technique de traitement linéaire du signal ne peut produire de meilleurs résultats. Quand on obtient des résultats expérimentaux moins bon ou meilleurs que ceux prédits (les deux cas arrivent), ça signifie simplement que les hypothèses de base étaient fausses (bande de bruit plus faible principalement), pas que la théorie est en cause.

8.1.2.4 Note sur les techniques numériques

Ce qui vient d'être dit est globalement vrai quelle que soit la méthode de traitement du signal adoptée (analogique ou numérique). Il convient néanmoins d'attirer l'attention du lecteur sur quelques effets de bord des techniques de traitement du signal échantillonné. Nous avons déjà discuté l'importance du filtre anti-repliement, mais il convient ici d'y revenir sous un autre angle. Nous avons cherché à mesurer une énergie déposée ou une amplitude de signal (proportionnelle à cette même énergie). Ceci étant, l'instant d'arrivée des signaux est par essence aléatoire, donc avec une phase aléatoire par rapport à la période d'échantillonnage. Ainsi, pour l'exemple précédemment traité, les trois signaux suivants (en phase avec l'échantillonnage en bleu, 1/3 de retard en vert et 2/3 en rouge) devraient donner le même résultat. Ça n'est pas le cas pour les signaux échantillonnés!



On remarque ici que l'application du filtre optimal conduit à une erreur de mesure d'amplitude de l'ordre de $0,8\%_{\text{pktopk}}$ et $0,2\%_{\text{RMS}}$ qui provient uniquement de la phase du signal par rapport à l'échantillonnage. Cette erreur est la même quelle que soit l'amplitude du signal d'entrée et doit être ajoutée au bilan d'incertitudes. Dans le cas présent, on aurait donc, après le filtre optimal :

Performances de filtrage	Cen	1keV_{RMS}
Effet de phase	$\frac{\Delta E}{E}$	$0,8\%_{\text{pktopk}} , 0,2\%_{\text{RMS}}$

Et en synthèse :

$$\sigma_E = 1\text{keV} \oplus 0.002 \cdot E$$

Soit, une contribution absolue (bruit électronique) et une contribution relative à l'énergie déposée (qui ne s'améliore donc pas avec celle-ci). On apprend donc que l'amélioration de filtrage est efficace (ici) en dessous de 500keV et qu'au-delà, ce sont les imperfections du filtre qui prédominent.

L'idée ici était d'attirer l'attention sur un phénomène spécifique au traitement des signaux échantillonnés. On aurait tout aussi bien pu intégrer cet aspect dans la définition du bruit du filtre optimal. On aurait alors obtenu un autre filtre. C'est bien au concepteur que revient le choix. Que veut-il privilégier, que veut-il corriger ?

8.1.3 Mesures de temps

Cette fois-ci, avant de présenter le filtre optimal, on va examiner en détails les techniques usuelles.

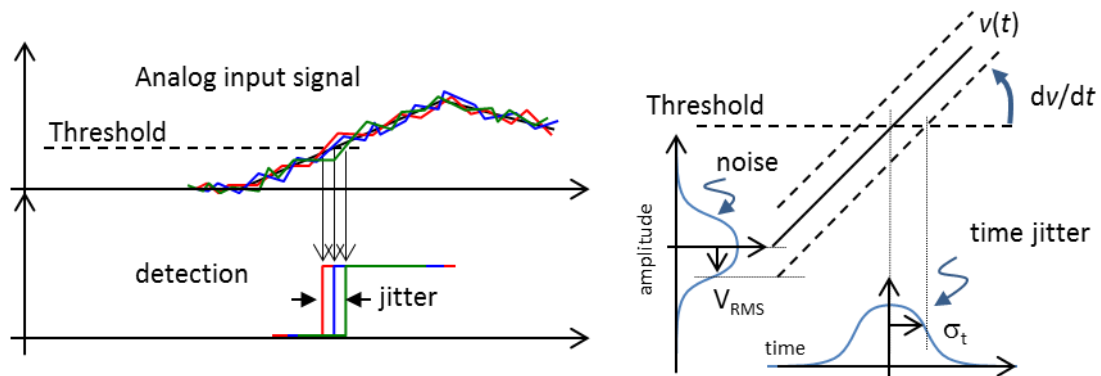
On trouve plusieurs techniques de mesure de temps dont les plus abouties sont la discrimination à seuil et la discrimination à fraction constante (et quelques adaptations pour cette dernière).

8.1.3.1 Le discriminateur à seuil, Leading Edge Discriminator

Le discriminateur à seuil permet de savoir à quel instant une impulsion a dépassé un seuil donné. C'est la déclinaison la plus simple de la mesure de temps. Il n'est pas exempt de défauts, mais il fait parfaitement l'affaire dans de nombreuses applications. Il peut servir à trigger sur le signal (simplement le détecter), ou à mesurer le temps dans des conditions très précises qui seront explicitées.

L'incertitude temporelle au franchissement d'un seuil (jitter)

Le signal dont on veut mesurer l'instant d'apparition est généralement superposé à du bruit provenant de l'environnement immédiat du détecteur et de son éventuel préamplificateur. On va mesurer l'instant exact où signal et bruit vont franchir une certaine tension. Cet instant va donc dépendre du signal, mais également du bruit comme cela est illustré sur la figure suivante. Pour trois impulsions identiques, on obtient trois instants de franchissement différents :



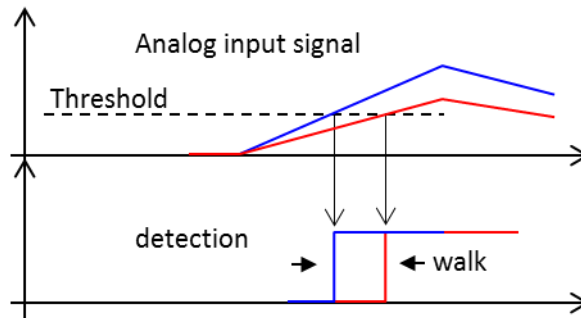
L'incertitude temporelle (time jitter) est liée à la pente du signal, dv/dt , (à l'instant de franchissement) et au bruit dans le domaine temporel, v_{RMS} :

$$\sigma_{tLED} = \frac{v_{RMS}}{dv/dt}$$

Par exemple, un signal montant à 100mV en 5ns, perché sur un bruit de 1mV_{RMS} permettrait d'atteindre des incertitudes temporelles de l'ordre de 50ps_{RMS}. De ce point de vue, aucune technologie de discrimination ne peut faire mieux que ce qui vient d'être décrit (ou sinon, c'est que la bande de bruit n'était pas adaptées à la bande signal, et ça, ça n'est pas la faute du discriminateur, mais de l'instrumentaliste).

L'erreur de mesure (walk)

S'il présente la meilleure incertitude temporelle possible, le discriminateur à seuil a aussi la caractéristique de générer la plus forte erreur sur la mesure... Celle-ci, encore appelée time walk, provient du fait que l'instant de déclenchement est gouverné par la pente du signal. Les signaux d'instrumentation nucléaire (bien nés) sont homothétiques en amplitude. Donc, à temps de montée donné, leur pente est proportionnelle à l'amplitude (et donc à l'énergie déposée), comme cela est illustré ci-dessous :



Ainsi, si notre physique produit des signaux montant en T_{rise} ns et qu'on fait des mesures sur des impulsions situées entre A_{min} et A_{max} , avec un seuil v_{thr} , alors l'erreur temporelle Δ_t (entre les plus petits et les plus grands signaux) vaut :

$$\Delta_t = T_{rise} \cdot v_{thr} \cdot \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} \cdot A_{min}}$$

Reprenons les signaux de l'exemple (temps de montée 5ns, bruit $1mV_{RMS}$). Typiquement, le seuil de déclenchement serait placé à quelques écart-type de bruit (vers 4-5mV).

Si l'amplitude des signaux varie entre le seuil et « beaucoup », alors le time walk est de l'ordre du temps de montée, soit 5ns ! C'est très mauvais.

Si par contre, notre physique avait une gamme dynamique réduite, par exemple de 90 à 110mV, le time walk ne serait que de $40ps_{pktpk}$.

En conclusion, le discriminateur à seuil est un instrument parfaitement adapté aux signaux de forte amplitude et de faible dynamique. Ses performances, essentiellement le time walk, se dégradent rapidement lorsque la dynamique augmente, et surtout lorsque l'amplitude des plus faibles signaux n'est plus notablement grande devant le seuil.

8.1.3.2 La discrimination à fraction constante, Constant Fraction Discriminator

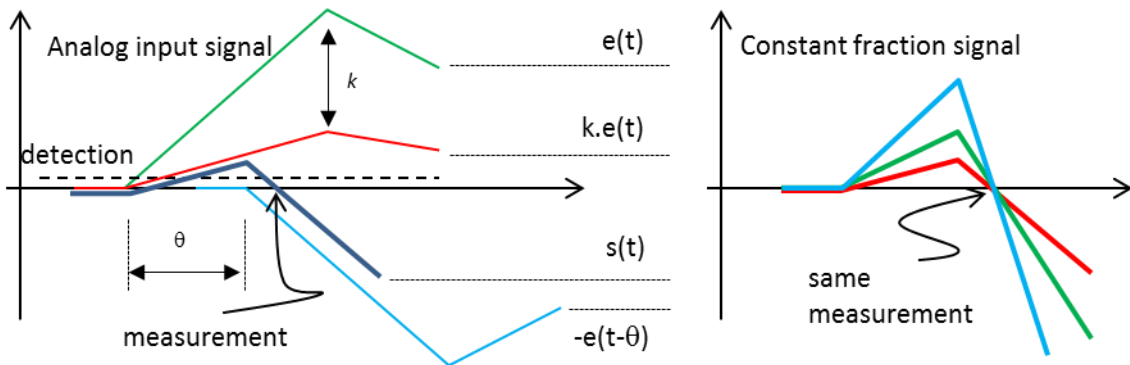
Le discriminateur à fraction constante a été développé justement pour éliminer les problèmes de time walk. Il opère un « petit tour de magie » sur le signal analogique e absolument remarquable qui consiste en premier lieu à en faire deux copies. L'une est multipliée par une fraction k (inférieure à 1), l'autre est retardée d'une durée θ et inversée. Elles sont ensuite sommées²³ pour former le signal s dont on mesure l'instant de passage par zéro, après le franchissement d'un seuil de déclenchement préalablement fixé. L'opération

²³ Il existe d'autres façons de procéder, mais elles sont toutes équivalentes à ce qui vient d'être décrit.

analogique sur le signal est très simple à réaliser et nécessite quelques résistances et une ligne à retard (un simple câble fait l'affaire). Cela revient à chercher l'instant t pour lequel :

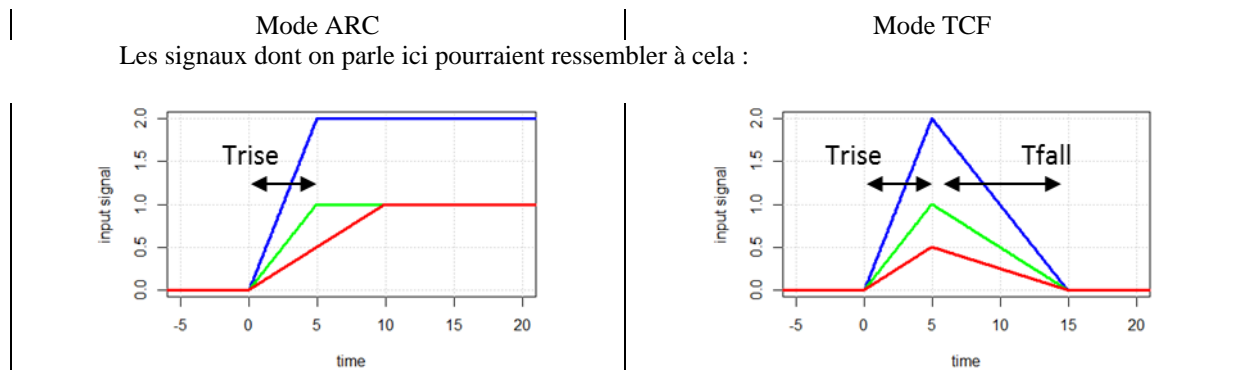
$$s(t) = k \cdot e(t) - e(t - \theta) = 0$$

Quand les signaux sont rigoureusement homothétiques, cet instant ne dépend pas de l'amplitude du signal, mais simplement de sa forme. Il n'y a donc, a priori, plus de time walk comme cela est illustré ci-dessous :



Et c'est bien là tout l'intérêt du discriminateur à fraction constante. En réalité, suivant la nature exacte des signaux, on distingue deux modes de fonctionnement basés sur le même appareil, mais utilisant des réglages différents : le mode ARC (Amplitude and Rise-time Compensation) et le mode TCF (True Constant Fraction).

Dans le mode ARC, on admet que les signaux ont un front de montée bien identifié, mais que leur nature au-delà est plus sujette à caution (en définitive, on suspecte qu'ils ne sont pas réellement homothétiques, mais on doit bien faire avec...). En mode TCF, on sait qu'ils sont parfaitement homothétiques. Ils ont un front de montée clair et net et il en est de même pour leur front de descente. Les deux modes, leurs réglages et l'analyse de leurs performances respectives vont être analysés côte à côte :



Si on suppose le bruit très étendu fréquentiellement, alors la valeur efficace de bruit du signal de discrimination vaut, dans les deux cas, approximativement :

$$v_{CFDRMS} \approx v_{RMS} \cdot \sqrt{1 + f^2}$$

Pour le réglage de la fraction et du retard, on va adopter des stratégies différentes :

Il faut impérativement que le signal ARC ait franchi le zéro avant que le signal original ait atteint le temps de montée (sinon, on peut avoir du time walk). Ceci impose une condition précise sur ces deux paramètres :

En mode TCF, on cherche à bénéficier de la pente descendante du signal pour franchir le zéro plus rapidement que le seul usage de la pente montante. La condition de franchissement devient :

$$Tr \cdot (1 - f) \leq \theta \leq (Tr + Tf) \cdot (1 - f)$$

$$\theta \leq Tr \cdot (1 - f)$$

Les pentes des signaux CFD, au franchissement, sont également différentes :

Le signal ARC dispose d'une pente égale à

$$(1 - f) \cdot \frac{dv}{dt}$$

Et par conséquent, l'incertitude temporelle vaut :

$$\sigma_{tARC} = \frac{\sqrt{1 + f^2}}{1 - f} \cdot \frac{v_{RMS}}{dv/dt}$$

Si on appelle k le rapport Tr/Tf ($k=1/2$ ci-dessus), alors, au franchissement, la pente du signal TCF vaut :

$$(1 + k \cdot f) \cdot \frac{dv}{dt}$$

(où $\frac{dv}{dt}$ est la pente du front montant). L'incertitude temporelle vaut donc :

$$\sigma_{tTCF} = \frac{\sqrt{1 + f^2}}{1 + k \cdot f} \cdot \frac{v_{RMS}}{dv/dt}$$

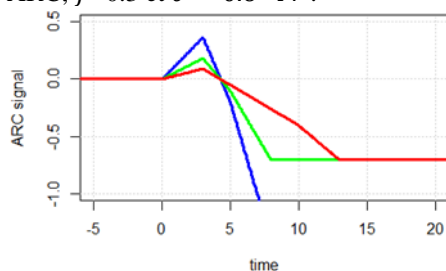
On peut à présent sélectionner les fractions optimales :

L'incertitude temporelle est ici meilleure pour les fractions les plus faibles. Si on choisit, par exemple $f=0.3$, (donc $\theta \leq Tr \cdot 0.7$) le mode ARC est 1.5 x moins bon que le simple discriminateur à seuil, mais il ne présente pas de time walk.

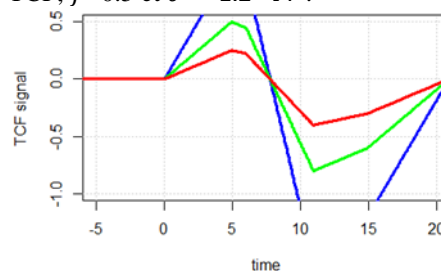
En mode TCF, les choses changent radicalement et l'optimum se situe à $f = k$. Pour le cas illustré plus haut, on choisirait donc $f=0.5$ et l'incertitude en mode TCF serait 0.9 x l'incertitude du discriminateur à seuil (donc, légèrement meilleure).

Le résultat de l'application de ces choix est illustré sur les figures suivantes :

Mode ARC, $f=0.3$ et $\theta = 0.6 \cdot Tr$:



Mode TCF, $f=0.5$ et $\theta = 1.2 \cdot Tr$:



Subsiste une question, quelle est le seuil pratique de détection des particules incidentes ? En définitive, nous allons voir que c'est la réponse à cette question qui va nous guider dans le choix pratique du retard. Si on appelle ξ le nombre d'écart-types de bruit qu'on prend, par sécurité pour être certain de ne déclencher que sur le signal, alors, il faut que le signal (ARC ou TCF) dépasse ξ x le bruit (ARC ou TCF).

En mode ARC, il est donc nécessaire de vérifier que

$$f \cdot \theta \cdot \frac{A_{min}}{Tr} \geq \xi \cdot v_{RMS} \cdot \sqrt{1 + f^2}$$

Comme f est petit, θ vaut approximativement Tr , ce qui conduit à :

$$A_{min} > \frac{\xi \cdot v_{RMS}}{f}$$

Le seuil de déclenchement est sensiblement plus élevé que celui du discriminateur à seuil, dans les mêmes conditions. Avec une fraction de 10%, il serait 10x plus haut !

On a donc généralement intérêt à prendre des fractions de l'ordre de 0.2..0.3 et le retard complémentaire

En mode TCF, on a approximativement la même condition, mais cette fois-ci la fraction est plus élevée. Pour le retard, il suffit de regarder le graphe juste au-dessus pour constater que, si on le prend plus grand que le temps de montée, le signal TCF va présenter une légère pente décroissante avant d'atteindre sa pente la plus rapide au franchissement.

En mode TCF, on a donc généralement intérêt à utiliser une fraction de l'ordre du rapport Tr/Tf et un retard de l'ordre du temps de montée.

Bien entendu, ces principes de réglages ne sont en définitive que des lignes directrices. La mesure de temps est un art complexe et les grandes théories résistent rarement à l'expérience (ici, on n'a pas fait de grande

théorie, on a juste vu quelques points de bon sens). Le « bon » réglage est donc souvent affaire de tâtonnements autour des idées qu'on vient de voir.

8.1.3.3 Le filtre optimal, place à un peu d'exotisme

C'est un sujet rarement abordé, mais qui mérite de s'y attarder un peu. On a déjà traité des filtres optimaux pour la mesure de charges. N'y aurait-il pas quelque chose à faire pour le temps ? La réponse est bien évidemment positive. Il suffit d'appliquer la démarche désormais habituelle :

On sait exprimer l'incertitude de mesure en temps :

$$\sigma_t = \frac{v_{RMS}}{dv/dt}$$

C'est elle qu'il faut minimiser améliorer le rapport signal à bruit. Ici le bruit et la pente doivent être exprimés en sortie du filtre h_t de coefficients $h_t[i]$. Si le bruit est blanc, alors,

$$v_{RMS} = \sigma_0 \cdot \sqrt{\sum_{i=0..N} (h_t[i])^2}$$

Pour la pente, il suffit de se rappeler d'une propriété sympathique du produit de convolution, noté * (le filtrage est une convolution, rappelons-le) :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (h * e) = h * \frac{de}{dt}$$

Par conséquent,

$$\frac{dv}{dt}[n] = \frac{1}{\Delta T} \cdot \sum_{i=0..N} h_t[i] \cdot (e[n+i-1] - e[n+i])$$

Et on cherche à minimiser :

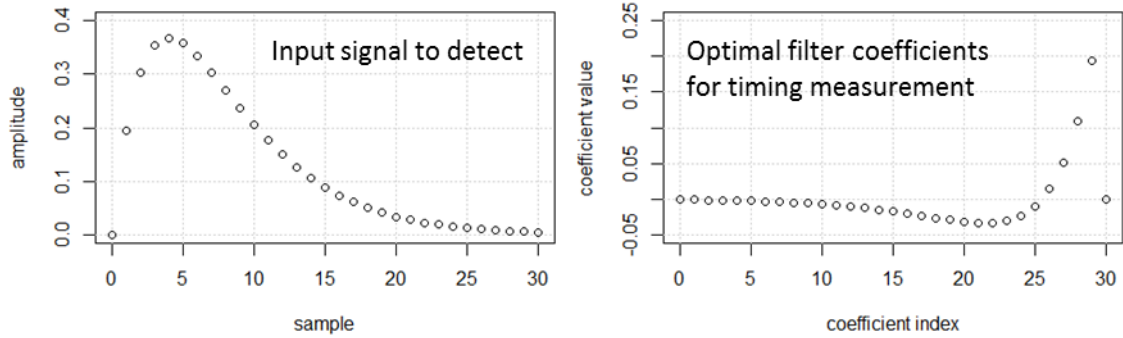
$$\sigma_t = \frac{\sigma_0 \cdot \sqrt{\sum_{i=0..N} (h_t[i])^2}}{\frac{1}{\Delta T} \cdot \sum_{i=0..N} h_t[i] \cdot (e[n+i-1] - e[n+i])}$$

On applique exactement le raisonnement appliqué à la mesure de charges et on trouve $h_t[i] = e[n+i-1] - e[n+i]$, soit, à un coefficient multiplicatif près (aucune importance) :

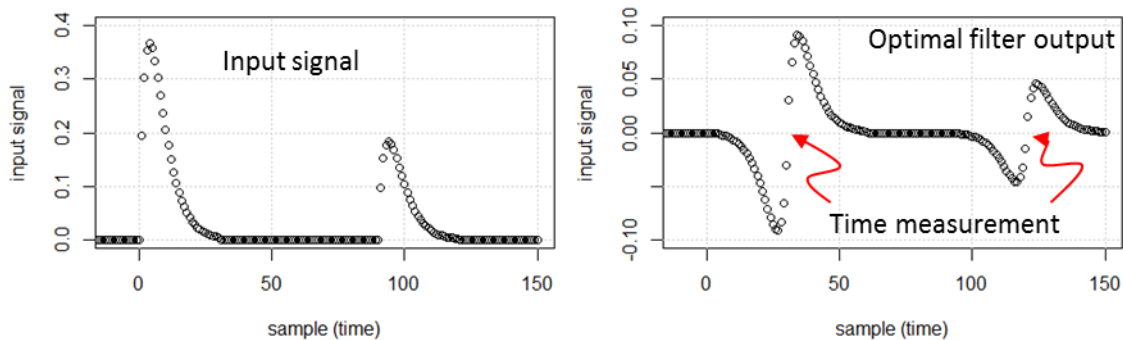
$$h_t = \frac{d}{dt} h_\infty$$

Le filtre optimal pour la mesure de temps est la dérivée du filtre optimal pour la mesure d'amplitude. Par essence²⁴, il coupe le continu et trigge à zéro, ce qui évite tout problème de time walk. Sa forme, pour un signal d'entrée donné est illustrée ci-dessous :

²⁴ Ça vient simplement de l'opération de dérivation.



Appliqué à deux impulsions consécutives, sa réponse est la suivante :



Outre qu'il a le bon goût de couper le continu, la réponse est symétrique au point de franchissement du zéro, ce qui est très agréable pour capturer proprement l'instant de franchissement. Son défaut majeur est de ne pas être réalisable analogiquement... Sur le type de signal exposé ci-dessus, l'incertitude temporelle vaudrait 0.8 x celle du discriminateur à seuil, soit un gain de 20% (mais sans le problème de time walk). Bien entendu, il faudrait quand même interpoler le signal autour du point de franchissement pour obtenir la valeur de l'instant de franchissement.

8.1.3.4 Ce qu'il faut retenir

La mesure de temps est un exercice particulièrement délicat. Nous n'avons examiné ici que l'incidence de l'électronique sur les résultats qu'il serait possible d'atteindre.

Lorsque la dynamique des signaux est réduite et qu'ils sont de grande amplitude, le discriminateur à seuil donne des résultats tout à fait convaincants. Il présente toujours du time walk qui est parfois très supérieur au time jitter.

Quand la dynamique des signaux est importante, on n'a guère le choix, il faut utiliser un discriminateur à fraction constante.

- Pour des signaux parfaitement homothétiques présentant à la fois un front de montée et un front de descente rapides, on peut utiliser le mode ARC avec des fractions de l'ordre du rapport T_r/T_f . Le retard est alors de l'ordre du temps de montée.
- Pour des signaux ne présentant qu'un front de montée fiable, il convient de choisir une fraction faible (typ. 30%) et un retard correspondant au complément du temps de montée, modulo la fraction.

Attention, la définition exacte de la fraction dépend de l'implantation électronique du discriminateur (donc du constructeur de l'équipement). Il faut donc convertir ce que nous avons vu.

Le tableau suivant, qui s'explique de lui-même, rassemble les résultats en fonction de la classe exacte des signaux d'entrée :

	Type de discriminateur		
	LE	CFD-ARC	CFD-TCF
Amplitude fixe	★ ★ ☆	★ ★ ☆ ⚠ seuil	★ ★ ★
Homothétiques purs, Tr et Tf fixes	☆ ☆ ☆ ⊘	★ ★ ☆ ⚠ seuil	★ ★ ★ ⬆
Amplitude variable, Tr variable	☆ ☆ ☆ ⊘	★ ★ ★ ⬆	☆ ☆ ☆ ⊘

8.2 Signaux homothétiques à support aléatoire en présence de bruit blanc

Il s'agit d'un bien long titre pour parler des signaux de scintillation vus, par exemple, à travers un tube photomultiplicateur. Ces signaux sont généralement homothétiques, mais pas toujours et on verra plus loin quelques applications intéressantes à ce sujet. Le tube photomultiplicateur « voit » en réalité :

- un train d'impulsions de photons dont l'enveloppe moyenne est, par définition, portée par la (ou les) constante de décroissance du scintillateur.

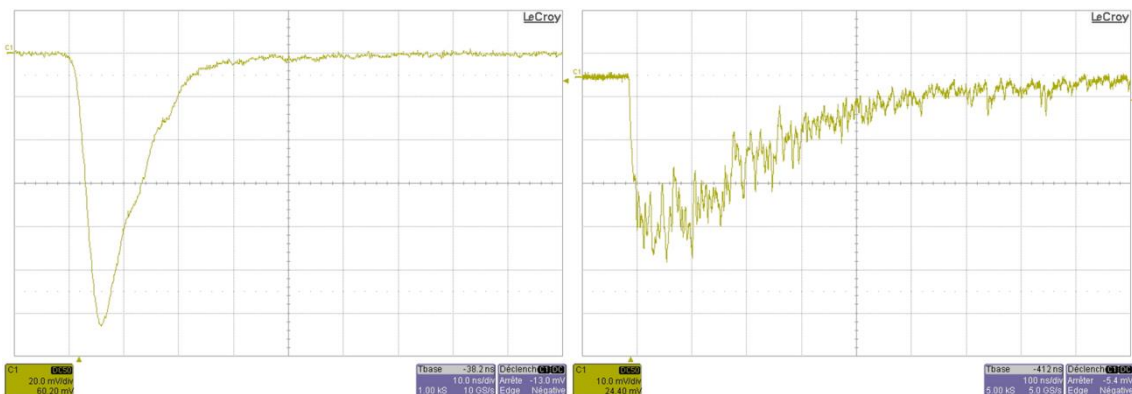
Il nous restitue cette information à travers

- La forme de sa réponse impulsionnelle
- Son spectre de réponse au photoélectron unique

Enfin, à tout cela s'ajoute

- le bruit électronique, supposé ici blanc et gaussien.

Les figures suivantes montrent de tels signaux, à gauche pour un scintillateur organique de type BC400 et à droite pour un scintillateur inorganique, du NaI(Tl) (iodure de sodium dopé au tallium).



La nature quantique du flux de photons est particulièrement visible sur les signaux de NaI(Tl) où l'enveloppe de l'impulsion électronique se voit ajouter un « bruit » lié aux fluctuations temporelles du débit de l'impulsion lumineuse.

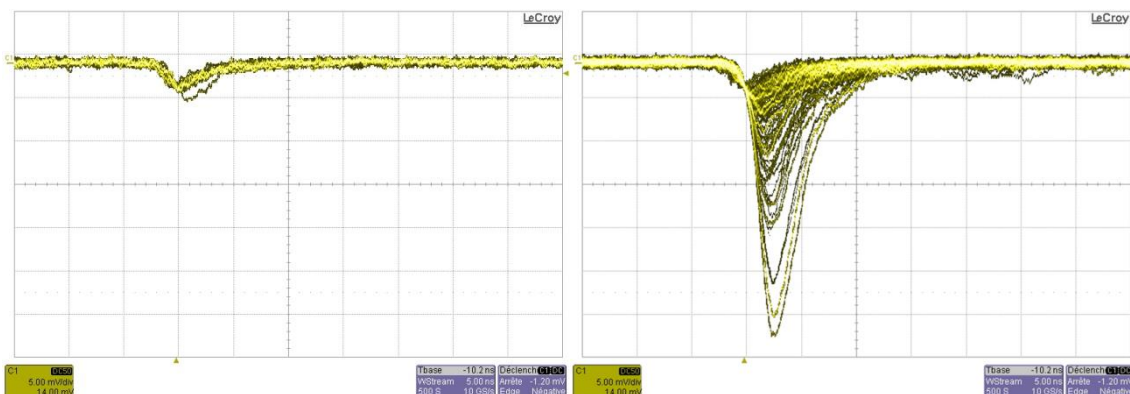
8.2.1 Quelques points de détail

8.2.1.1 Un mot sur le gain...

Il est souvent utile de connaître le gain du photodétecteur utilisé, cela pour plusieurs raisons :

- Il peut ne pas être conforme aux données constructeur qui sont souvent fournies à titre indicatif. Chaque PM a sa propre « personnalité » qu'il faut connaître...
- Du gain dépend la linéarité du photodétecteur. S'il est agréable d'avoir de « grands » signaux, il est encore plus agréable d'avoir un détecteur linéaire ! Pour cela, il ne faut pas que la charge délivrée par l'instrument soit trop importante. Celle-ci correspond simplement au produit du nombre de photons incidents par le gain. En connaissant bien ce dernier, on peut alors vérifier son comportement, et éventuellement remonter à un nombre de photons incidents, ce qui est toujours un exercice intéressant, pour vérifier, par exemple le bilan optique du système.

Les deux figures suivantes ont été capturées sur le même appareil, un PM de type XP2020. A gauche, quelques photoélectrons uniques et à droite, de la lumière produite en éclairant le verre de la photocathode (scintillation du verre + Čerenkov ?) au moyen d'une source de β de haute énergie (90Sr) :



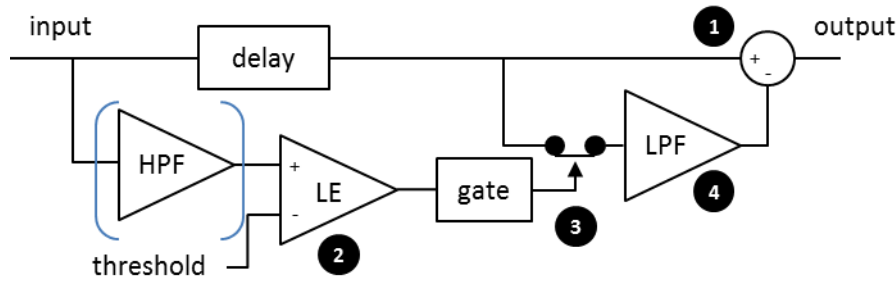
- *Le photon unique.* Les signaux font $\approx 2\text{mV}_{\text{pktopk}}$ sur une résistance de 50Ω , soit un courant crête de $400\mu\text{A}$. Ils sont approximativement triangulaires et montent²⁵ en $T_{\text{rise}} = 2\text{ns}$ et redescendent en $T_{\text{fall}} = 3\text{ns}$. La charge est donc de $Q = I_{\text{max}} \cdot \frac{T_{\text{rise}} + T_{\text{fall}}}{2} = 100\text{fC}$ et elle correspond à 1 photoélectron. On en déduit le gain $G = \frac{Q}{e} \approx 6.2 \cdot 10^5$.
- *La lumière dans le verre de la photocathode.* Le gros des impulsions fait environ $15\text{mV}_{\text{pktopk}}$, monte en 2ns et redescend en 5ns , soit une charge de 1pC correspondant donc à la détection d'environ 10 photoélectrons.

8.2.1.2 Et un autre sur la ligne de base...

Nous avons jusqu'à présent supposé que le bruit était blanc et c'est généralement le cas quand la CEM est parfaite, mais, en définitive, c'est ce point précis qui n'est pas une généralité...

²⁵ Le front de montée est toujours le premier front rencontré, même si l'impulsion est négative.

Quand on a des problèmes de ligne de base, il est de bon ton d'utiliser un correcteur de ligne de base. Un exemple simple et efficace de ce type de circuit est donné ci-dessous :



Son fonctionnement est le suivant. Il est constitué avant tout d'une voie « noble » qui porte le signal et les éventuelles variations de ligne de base, et d'un filtre de poursuite qui tente de reproduire le plus fidèlement possible cette dernière.

Supposons le filtre « accroché » (i.e. il fait son travail et nous fournit un estimateur de la ligne de base). Le nœud de sommation ❶ nous produit donc un signal utile ne portant plus que les impulsions du détecteur. Dès lors, lorsqu'une impulsion arrive, elle est détectée par un discriminateur à seuil ❷ qui va commander une porte dont la durée est plus grande que celle des impulsions physiques types, qui va lui-même bloquer ❸ le signal entrant pour éviter de rentrer cette impulsion (physique) dans le filtre de poursuite ❹. Pour éviter cela, il convient de placer du retard avant l'interrupteur du filtre de poursuite. Celui-ci compense le chemin soustracteur, discriminateur, porte et interrupteur. Pour que le filtre de poursuite n'ajoute pas de bruit sur la voie nombre, il convient bien entendu que sa bande passante soit beaucoup plus basse que la bande de bruit. Attention néanmoins, dans ces conditions, il va réagir avec du retard (globalement sa constante de temps de réponse) et ne saura pas corriger les variations rapides...

Il existe bien d'autres méthodes pour effectuer la correction de ligne de base. Elles ont toutes des avantages et inconvénients divers et variés, mais bien utilisées, elles améliorent fondamentalement les mesures comme nous allons le voir. Les correcteurs de ligne de base ne sont généralement pas intégrés sur les voies rapides²⁶ et c'est une grave erreur. Dont nous allons examiner les conséquences sur la simple mesure de charges pour fixer les idées.

Prenons le cas concret d'un tube photomultiplicateur de gain $G=10^6$ délivrant son signal sur une résistance de $R=50\Omega$ et admettons qu'on intègre ce signal sur une porte de durée θ . On regarde à l'oscilloscope et on voit une « ronflette » d'amplitude pic à pic ΔV sur la ligne de base. Cette « ronflette » va nous faire surestimer ou sous-estimer le nombre de photons mesurés bien qu'en valeur moyenne, on mesure toujours le bon nombre. Supposons que cette ronflette ait une distribution uniforme (en pratique, ça n'est pas le cas s'il s'agit d'un problème de CEM) et qu'elle soit constante sur la durée d'une impulsion. On peut calculer le courant équivalent à cette « ronflette », donc la charge totale sur la durée de la porte et donc le nombre de photons équivalents au bruit Neb . Avec les hypothèses ci-dessus, nous trouverions :

$$Neb = \frac{1}{R \cdot e \cdot \sqrt{12}} \cdot \frac{\Delta V \cdot \theta}{G}$$

Par exemple, si $\Delta V = 1mV_{\text{pktpk}}$, et que la porte d'intégration dure 100ns, alors $Neb \approx 6$ photoélectrons. Ça semble peu, mais cela suffit à ruiner une bonne discrimination neutrons gamma (par exemple)...

²⁶ PUB : sauf sur le système d'acquisition FASTER développé au LPC-Caen qui le premier, à notre connaissance, a intégré un correcteur pour les signaux rapides (voir faster.in2p3.fr). Ça fonctionne à la perfection (quand on sait s'en servir) et ça donne vraiment des résultats exceptionnels pour les mesures qui viennent après.

8.2.2 Mesure de charge

Nous allons en premier lieu établir le filtre optimal pour nos signaux avant d'étudier les techniques habituelles. Pour cela, nous allons travailler en temps échantillonné car les résultats fondamentaux sont plus simples à obtenir. Il nous faut une description du signal et des fluctuations qui l'accompagnent. Par ailleurs, pour nous rapprocher plus simplement du résultat final, nous supposerons que le « filtre » est appliqué en une fois au signal (il ne s'agit plus à proprement parler d'un filtre, mais bel et bien du produit scalaire du signal par un vecteur de projection). Ainsi, si nous avons détecté notre signal à $i=1$, nous disposons des échantillons $e[n]$ et nous allons produire la mesure m à l'échantillon k en calculant :

$$m = \sum_{i=1..k} a_i \cdot e[i]$$

Nous avons supposé que nos signaux étaient homothétiques. On peut donc les écrire de la façon suivante :

$$e[n] = N \cdot e_0[n]$$

Où e_0 est le support du signal (i.e. sa forme, cette fonction se somme à un), et N correspond au nombre de photoélectrons de l'impulsion d'entrée.

Si le nombre de photoélectrons n'est pas trop faible, on peut approximer l'incertitude sur le signal à chaque instant par :

$$\sigma[n] = \sqrt{N \cdot e_0[n]} \oplus \sigma_0$$

Où σ_0 est le bruit blanc gaussien provenant de l'électronique. On a simplement écrit que les fluctuations étaient poissonniennes (N photons mesurés, donc un écart type de \sqrt{N} sur le signal) et qu'on y ajoutait le bruit d'acquisition. De fait ici, σ_0 est le nombre de photoélectrons équivalents en bruit.

8.2.2.1 Le filtre optimal

1. La mesure, après application du filtre, vaut donc :

$$m = \sum_{i=1..k} a_i \cdot e[i] = N \cdot \sum_{i=1..k} a_i \cdot e_0[i]$$

2. Les fluctuations sur la mesure s'écrivent simplement :

$$m_{RMS} = \sqrt{\sum_{i=1..k} a_i^2 \cdot (N \cdot e_0[i] + \sigma_0^2)}$$

3. On cherche donc à maximiser en jouant sur les coefficients a_i :

$$\frac{S}{N} = \frac{N \cdot \sum_{i=1..k} a_i \cdot e_0[i]}{\sqrt{\sum_{i=1..k} a_i^2 \cdot (N \cdot e_0[i] + \sigma_0^2)}}$$

Pour cela, on va progresser de la façon suivante :

Supposons en premier lieu que le bruit électronique soit négligeable. Existe-t-il une limite physique à notre problème ? Avec cette nouvelle hypothèse, le problème revient à maximiser :

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = N \cdot \frac{(\sum_{i=1..k} a_i \cdot e_0[i])^2}{\sum_{i=1..k} a_i^2 \cdot e_0[i]}$$

On se souvient de l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

$$|\int A \cdot B|^2 \leq \int |A|^2 \cdot \int |B|^2, \text{ ou encore } \frac{|\int A \cdot B|^2}{\int |A|^2} \leq \int |B|^2$$

En posant :

$$\begin{pmatrix} A \cdot B = a \cdot e_0 \\ A^2 = a^2 \cdot e_0 \end{pmatrix}, \text{ soit } \begin{pmatrix} A = a \cdot \sqrt{e_0} \\ B = \sqrt{e_0} \end{pmatrix}$$

On trouve :

$$\frac{S}{N} \leq \sqrt{N}$$

Cela représente la limite physique. Quels que soient les coefficients qu'on choisisse, le rapport signal à bruit sera toujours limité aux fluctuations poissonniennes du nombre de photoélectrons mesurés. Nous venons d'enfoncer une belle porte ouverte²⁷. Il est impossible de contourner la loi de poisson, « *Dura lex, sed lex* ».

Armés de ce résultat, nous pouvons à présent chercher quel filtre nous permettrait d'atteindre cette limite physique ? Pour cela, il suffirait de trouver les coefficients qui permettraient d'atteindre l'égalité. On cherche donc les a_i vérifiant:

$$N \cdot \frac{(\sum_{i=1..k} a_i \cdot e_0[i])^2}{\sum_{i=1..k} a_i^2 \cdot e_0[i]} = N$$

Il suffit que $a_i \cdot e_0[i] = a_i^2 \cdot e_0[i]$ pour y parvenir, soit tout simplement $a_i = 1$!

En définitive, nous venons de démontrer (approximativement et avec beaucoup de mal, il faut en convenir) que le filtre optimal consiste simplement à intégrer le signal sur sa durée... Par conséquent, le classique QDC est le filtre optimal pour la spectroscopie des signaux de tubes photomultiplicateurs... quand le bruit électronique est négligeable.

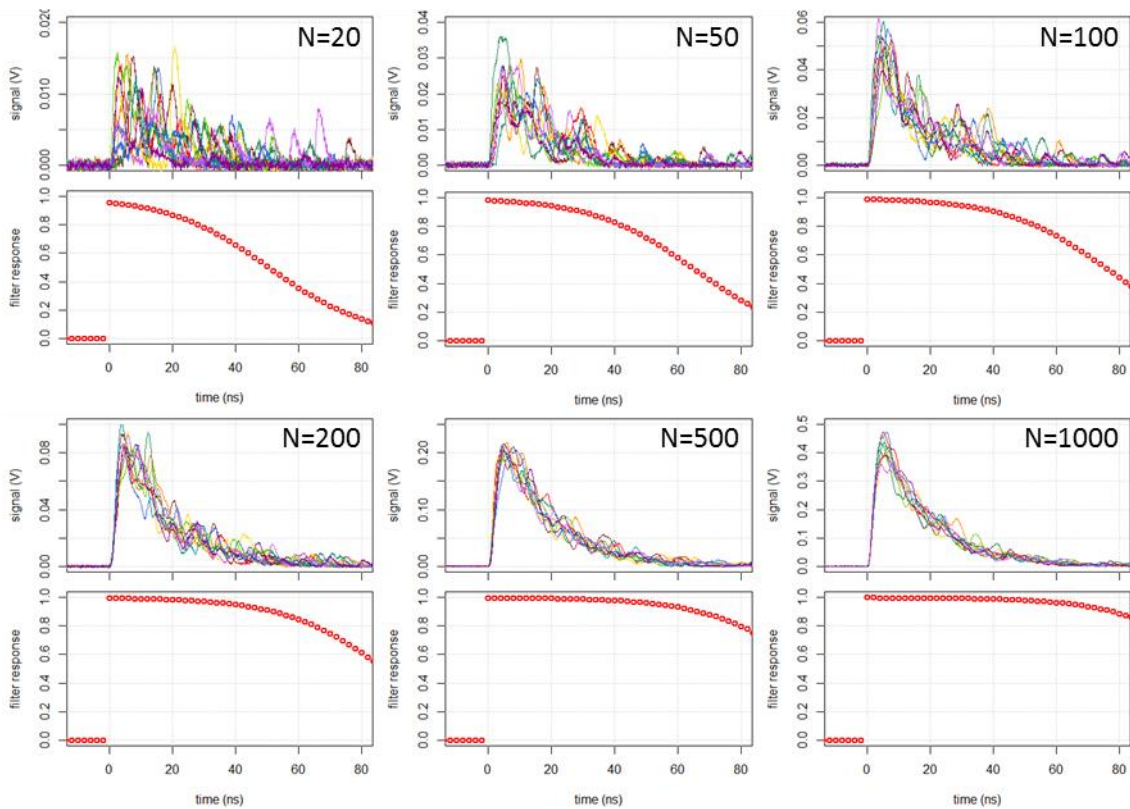
En présence de bruit blanc gaussien, il suffit d'appliquer exactement la même démarche pour trouver le filtre optimal (ou plus exactement la fonction de projection optimale) :

$$a = \frac{N \cdot e_0}{N \cdot e_0 + \sigma_0^2}$$

Où nous apprenons que la forme du filtre optimal dépend du nombre de photons mesurés... Ce filtre est inapplicable en électronique analogique et très complexe en électronique numérique. Cependant, ce résultat aura au moins la qualité de définir ce qu'il est possible de faire, au mieux. En pratique, on essaiera de s'en approcher...

La figure ci-dessous rassemble quelques signaux et les filtres optimaux qu'il faudrait leur appliquer (on a supposé ici que le signal de photon unique faisait 2.5mV d'amplitude et le bruit avait une valeur efficace équivalente à 1/10 de photoélectron (soit 250μV_{RMS}). Le tout cadencé à 500MHz. Il s'agit ici typiquement de signaux de LaBr (bromure de lanthane) avec une constante de décroissance de 16ns :

²⁷ Ça n'est pas grave, le raisonnement est tout à fait valable et resservira plus loin, avec des résultats, cette fois-ci, plus probants !



On comprend assez aisément le comportement du filtre optimal. Il intègre le signal quand il y a de la lumière et il « s'éteint » quand l'ajout de bruit devient défavorable par rapport à l'ajout d'information. Ce moment dépend de la quantité de lumière incidente et on en déduit que lorsqu'on travaille sur des faibles dépôts d'énergie, on a peut-être intérêt à ne pas prendre de porte d'intégration trop longue.

8.2.2.2 Un point sur le spectre de photoélectron unique du photodétecteur

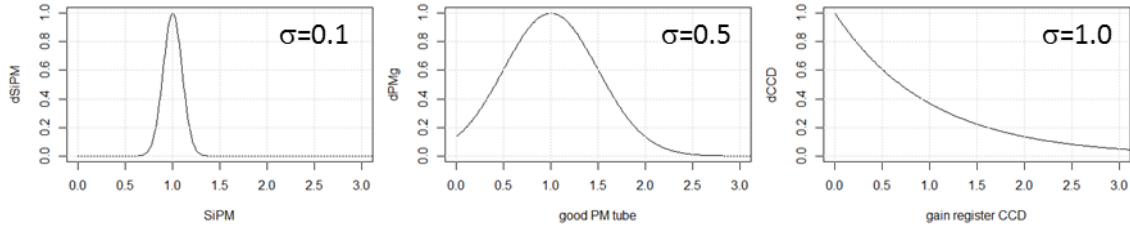
Le gain d'un photodétecteur est un atout quand on fait des mesures de très faibles flux lumineux... qui peut se transformer en redoutable inconvénient lorsque le nombre de photons à mesurer augmente. Pour comprendre cela, il faut revenir au mécanisme de mesure et analyser un peu plus finement le mécanisme d'amplification. Nous disposons de N_{hv} photons devant le détecteur. En premier lieu, celui-ci ne mesurera que N_{pe} photoélectrons (i.e. les photons qui ont eu l'obligeance de bien vouloir créer un électron primaire dans le détecteur). La relation entre ces deux quantités est la suivante :

$$N_{pe} = Q_{eff} \cdot N_{hv}$$

Où Q_{eff} est l'efficacité quantique (à la longueur d'onde de la lumière incidente). N_{pe} est en définitive une grandeur moyenne et le nombre de photoélectrons effectivement mesurés suit une distribution de Poisson de valeur moyenne $Q_{eff} \cdot N_{hv}$.

L'histoire ne s'arrête pas là dans les détecteurs disposant de gain interne (les tubes photomultiplicateurs, les SiPM, APD ou autres capteurs CCD à registre de gain). Le mécanisme d'amplification est généralement sophistiqué. Par exemple, dans les tubes photomultiplicateurs, chaque dynode apporte un gain d'approximativement 4 et au bout de 10 dynodes, on dispose de $4^{10}=10^6$ électrons, en moyenne, par électron incident. Dans les SiPM, le gain a lieu dans une zone de silicium de champ très élevé par collisions inélastiques sur la maille cristalline, produisant un gain très propre, approximativement identique pour chaque électron

incident. Dans les capteurs CCD à registre d'amplification, les électrons entrent dans un registre qui statistiquement, va multiplier par deux chaque électron avec une probabilité, disons de 3%. Au bout de 256 éléments de registre, on dispose de 2000 électrons par électron primaire, ce qui est considérable pour un capteur CCD. Ces trois mécanismes produisent des spectres de photoélectron unique très différents qui sont schématisés ci-dessous :



En définitive, quand on mesure N_{pe} photoélectrons, le signal m qu'on récupère est en réalité égal à \bar{G} , où \bar{G} est le gain moyen (ci-dessus, les courbes sont exprimées en nombre de photoélectrons, on a donc $\bar{G}=1$ pour les trois cas), mais chaque photoélectron a subi ce gain, et ses fluctuations. On peut donc écrire l'incertitude sur le signal :

$$\sigma_m = \bar{G} \cdot \sigma_{N_{pe}} \oplus N_{pe} \cdot \sigma_{\bar{G}}$$

L'incertitude sur le nombre de photoélectrons est connue, c'est tout simplement $\sqrt{N_{pe}}$. L'incertitude sur le gain moyen est plus subtile. En pratique, c'est comme si on tirait N_{pe} fois sur la distribution initiale du spectre de photoélectron unique. Celui-ci présente un écart-type σ ($=0.5$, ci-dessus pour le tube PM). Donc, quand on fait l'essai N_{pe} fois, l'incertitude qu'on a sur le gain moyen est $\sigma/\sqrt{N_{pe}}$. Au final, l'incertitude relative sur notre mesure s'exprime de la façon suivante :

$$\frac{\sigma_m}{m} = \frac{1}{\sqrt{N_{pe}}} \cdot \left(1 \oplus \frac{\sigma_{\bar{G}}}{\bar{G}} \right)$$

Le facteur de droite (ou toute autre dérivation du même type) de la relation ci-dessus est connu sous le nom de facteur de bruit additionnel (excess noise factor). C'est un élément incontournable des photodétecteurs autoamplifiés.

Ainsi, si on mesure un total de 10000 photoélectrons, avec un SiPM, sur une durée suffisante pour ne pas saturer le détecteur, l'incertitude relative sera de l'ordre de 1%, très proche de la limite quantique²⁸. Cela serait également le cas pour un très bon capteur CCD (bien refroidi et sans registre d'amplification) car ceux-ci ont un bruit de mesure l'ordre de quelques électrons. Dans la même configuration, un PM présenterait une incertitude relative de 1.1% (ce qui est tout de même 10% au-dessus de la limite quantique). Un capteur CCD à registre d'amplification donnerait 1,4%, soit 40% au-dessus de la limite quantique. En d'autres termes, il convient de cantonner les détecteurs autoamplifiés à ce qu'ils savent faire de mieux, à savoir, mesurer de très faibles flux lumineux. Quand le flux lumineux augmente, une très bonne photodiode couplée à un très bon préamplificateur donnera souvent de meilleurs résultats, aussi bien en termes d'incertitude de mesure qu'en linéarité.

²⁸ Le SiPM a bien d'autres problèmes, en particulier sa propension à émettre un courant d'obscurité considérable, typiquement plusieurs centaines de milliers d'électrons d'agitation thermique par s et par mm^2 de détecteur.

8.2.3 Mesure de temps

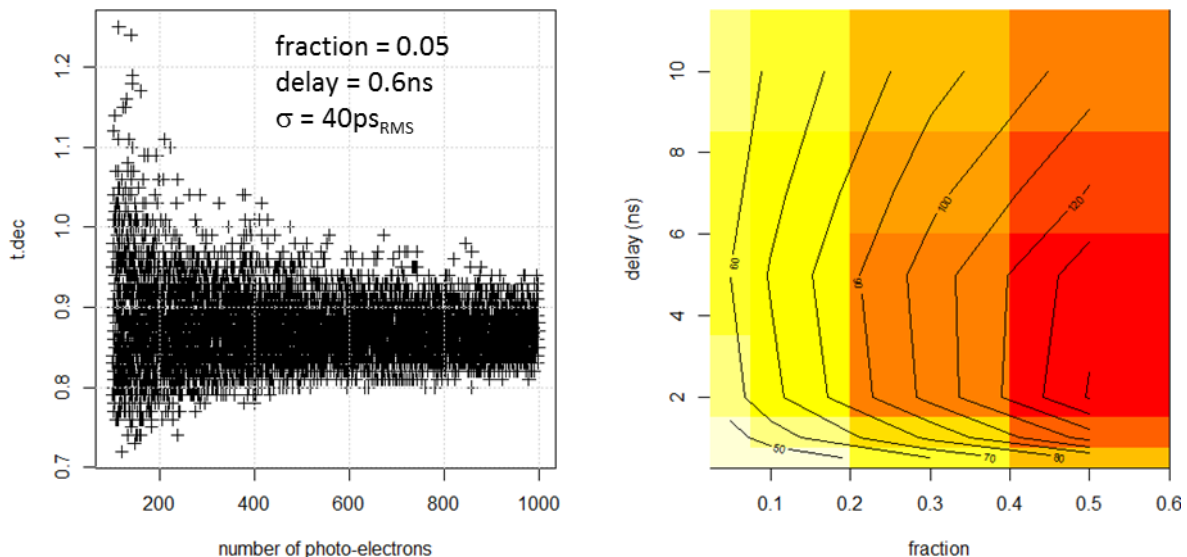
La mesure de temps des signaux de scintillation est un exercice ô combien délicat. Les performances qu'il sera possible d'atteindre vont dépendre de nombreux paramètres antagonistes qui vont nous écarter très sensiblement des règles (relativement) claires que nous avons établies pour les signaux purement homothétiques.

- En premier lieu, il convient d'utiliser le gain (PM, SiPM, ...) le plus élevé possible pour favoriser le spectre de photon unique, dans la limite, bien entendu de la linéarité du système (sinon, on ne sait plus mesurer l'énergie !).
- Le bruit est ce qu'il est (nous le prenons blanc sur une bande de 500MHz).
- La nouveauté réside, bien entendu, dans le fait que le signal de scintillation est, par essence, aléatoire en temps d'arrivée des photons. Même pour des nombres de photons considérables, disons 1k, par exemple, la statistique d'arrivée des photons, favorable au début, se dégrade rapidement. Il convient donc de NE PAS utiliser le front de descente.

Illustrons tout cela sur un cas précis :

- les signaux de scintillateur rapide très fin, type BC400, temps de décroissance mesuré, 6ns,
- bruit blanc sur 500MHz, valeur efficace $0.120\text{mV}_{\text{RMS}}$,
- PM type XP2020, temps de montée du photon unique 2ns, temps de descente 3ns, spectre de photon unique approximativement gaussien, gain 10^6 .

Nous modélisons ici un discriminateur à fraction constante dont la fraction et le retard sont ajustables. Les résultats de l'incertitude temporelle, pour une collection d'impulsions allant de 100 photoélectrons à 1000 photoélectrons présentent une allure typique (à gauche) et la collection de résultats est donnée à droite :



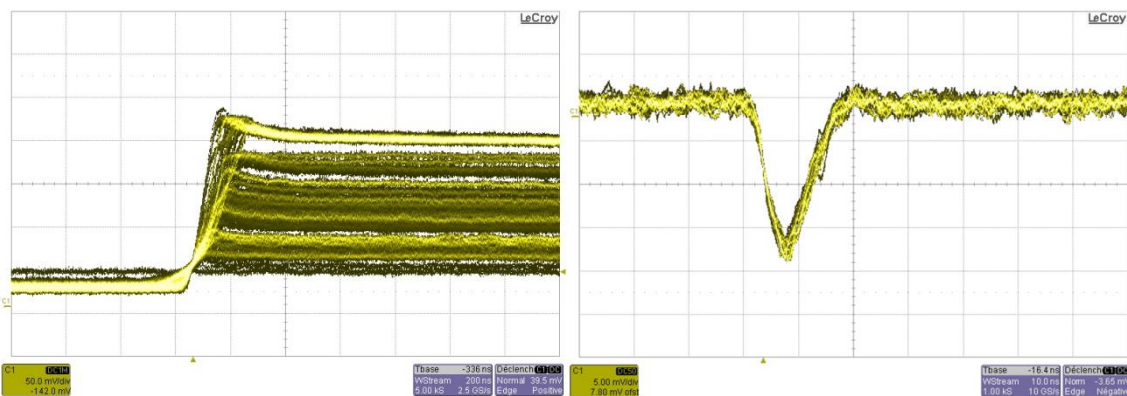
On constate sur ce graphe, et c'est une règle générale applicable à tous les scintillateurs, qu'on obtient toujours de meilleurs résultats avec la fraction la plus faible possible et le retard le plus court possible. En définitive, la statistique de l'instant de déclenchement est majoritairement gouvernée par les premiers photons détectés. Plus ils sont nombreux (i.e. le scintillateur est brillant) et plus ils arrivent vite (i.e. il est rapide), meilleure est la mesure de temps.

Ces conclusions sont généralisables à tous les scintillateurs, bien qu'il convienne d'optimiser manuellement la discrimination pour chaque cas particulier.

Une conséquence particulière de cet exercice est que les systèmes d'acquisition numériques sont « relativement » mal adaptés à la mesure de temps de signaux de scintillation. La nécessité de disposer de plusieurs points sur le front de montée les cantonne à des retards de l'ordre de 2 à 4ns pour des convertisseurs ADC fonctionnant à 500MHz. Donc, si on peut espérer des incertitudes de l'ordre de la cinquantaine de picosecondes en analogique, on aura du mal à faire mieux que 100ps_{RMS} en numérique (si ce n'est d'utiliser des convertisseurs exceptionnellement rapides, échantillonnant à un ou deux GHz, par exemple).

8.3 Signaux homothétiques en présence de bruit coloré

Nous concluons cette analyse par le chef-d'œuvre de l'instrumentation nucléaire que constitue la chaîne de spectroscopie pour les signaux de détecteurs silicium ou germanium et, par extension, de détecteurs solides, en général. Ces signaux ne sont généralement pas observables directement derrière le détecteur car ils sont trop faibles. On les mesure derrière un préamplificateur de charges (intégrateur de courant) où ils ont une forme très caractéristique (à gauche, un germanium hyper pur HpGe²⁹ « éclairé » par des γ de ¹³⁷Cs (662keV)), ou bien, avec une moins bonne résolution en énergie, derrière un préamplificateur receveur de ligne (à droite, un silicium irradié par les α de 5,5MeV d'une source de ²⁴¹Am) :



Si nous parlons ici de signaux homothétiques en présence de bruit coloré, c'est bien parce qu'on s'intéresse à la spectroscopie. Il va falloir utiliser tout l'arsenal du traitement du signal pour en venir à bout, mais le jeu en vaut la chandelle ! La chaîne de spectroscopie représente l'un des systèmes d'instrumentation les plus aboutis qu'il est possible de comprendre et maîtriser en tous points. Elle est rigoureuse et optimale sur de multiples aspects et elle permet de tirer le meilleur parti de ces extraordinaires détecteurs que sont les germaniums hyper-purs ou les détecteurs silicium. Dans les grandes lignes, les résultats auxquels nous arriverons seront aussi applicables aux chambres à ionisation et plus généralement à tous les détecteurs non auto-amplifiés pour lesquels on cherche à atteindre les performances ultimes de mesure.

Nous n'aborderons pas ici la mesure de temps car elle est très similaire à ce qui a été présenté pour le discriminateur à fraction constante en mode ARC (les explications en émergeront plus loin). Nous nous concentrerons ici sur la spectroscopie, c'est-à-dire, sur la mesure de l'énergie déposée par les particules incidentes.

²⁹ On notera la variabilité des temps de montés que produit ce type de détecteur et qu'il faudra gérer dans l'électronique... Elle avoisine ici les 200ns.

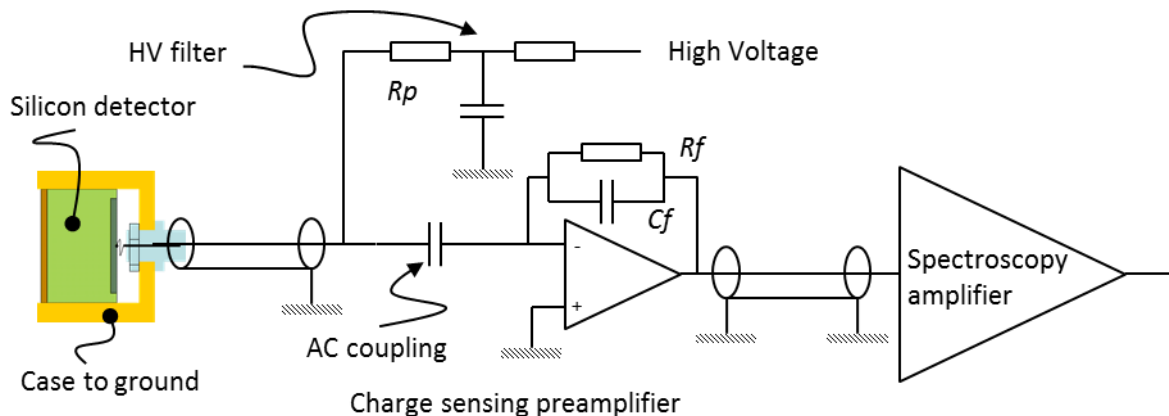
8.3.1 Le triptyque détecteur, préamplificateur, amplificateur de spectroscopie

Commençons par résumer les différents points importants qui ont déjà été notés dans ce document :

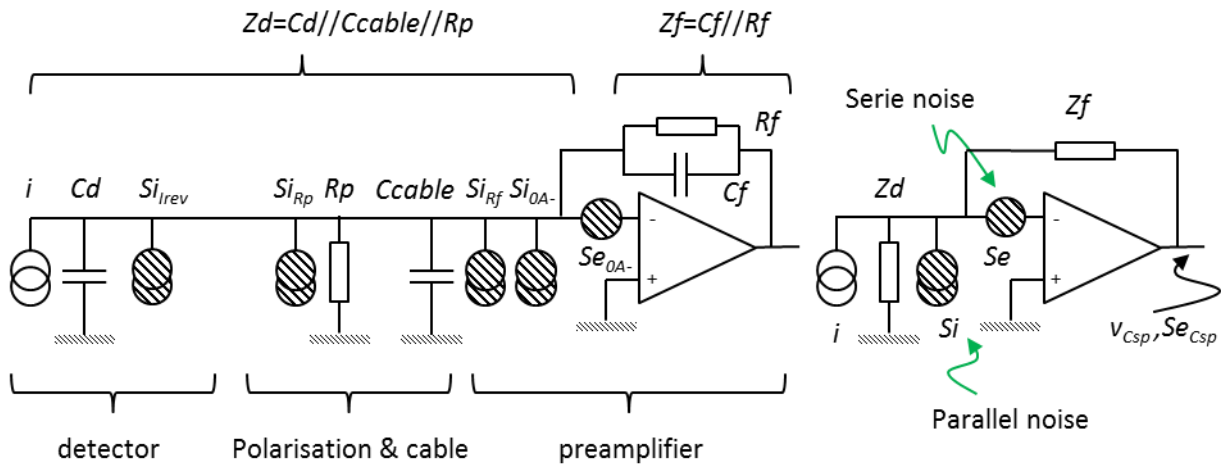
1. Le détecteur est modélisable par :
 - Son générateur de courant équivalent, i
 - En parallèle de sa capacité détecteur Cd
 - En parallèle de sa résistance de polarisation Rp (dont le point chaud est remis à la masse en petits signaux)
 - En parallèle du générateur de bruit de cette résistance Si_{Rp}
 - En parallèle de générateur de courant de bruit lié au courant inverse Si_{Irev} (sauf pour les chambres à ionisation)
 - En parallèle de la capacité équivalente au câble qui extrait le signal et l'amène au préamplificateur de charges, $Ccable$
2. Le préamplificateur de charges est un demi-amplificateur opérationnel : la connexion de l'entrée (+) à la masse n'est pas utile et ramène du bruit. Dans la suite, nous conserverons quand même la représentation par amplificateur opérationnelle qui est plus « conventionnelle ».
 - Il est contre-réactionné par une capacité, Cf , qui va intégrer le courant. Elle fournit le gain nécessaire sans ajouter de bruit additionnel
 - En parallèle de laquelle, nous devons placer une résistance de forte valeur, Rf , qui permet d'éviter au signal d'atteindre le rail d'alimentation (saturation). Elle contribue au bruit en entrée Si_{Rf} .
3. Après le préamplificateur de charges, on est sorti du bruit et on peut connecter l'amplificateur de spectroscopie. Celui-ci traite le signal de façon optimale pour la mesure de charge et corrige tous les défauts de détecteur (variabilité de temps de montée) et du préamplificateur (le signal n'est pas exactement un créneau).

Notons que les détecteurs solides ont généralement une électrode connectée à la masse et qui sert à protéger l'électrode de mesure du bruit de CEM. L'électrode de haute tension sert donc également d'extraction de signal et la lecture est donc en mode AC.

Tout cela est explicité sur les deux schémas suivants. Le premier est le schéma électronique réellement effectué et le second est le modèle en bruit « simplifié³⁰ » :



³⁰ Par simplifié, on entend ici réduit à ses principaux éléments...



8.3.2 Signal et bruit derrière le préamplificateur de charges

8.3.2.1 Signal

L'amplificateur étant considéré, au moins en première approximation, comme parfait, la fonction de transfert H_{Csp} (courant vers tension) réalisée par le préamplificateur de charges vaut :

$$H_{Csp} = \frac{V_{Csp}}{I} = \frac{R_f}{1 + p \cdot R_f C_f}$$

Elle ne dépend pas de l'impédance des éléments situés avant le préamplificateur (c'est tout l'intérêt de la contre-réaction. Le produit $R_f C_f$ est la constante de temps τ_{Csp} du préamplificateur. Soumis à une impulsion de courant $i = Q \cdot \delta(t = 0)$, la tension de sortie vaut :

$$v_{Csp} = \frac{Q}{C_f} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau_{Csp}}\right)$$

La sensibilité en charges est donc égale à $1/C_f$.

Par exemple, avec une source d' α de 5.5MeV, on récupère, dans du silicium ($\omega = 3.6\text{eV}$), approximativement 1.5M de paires électrons/trous. Si on choisit une capacité de contre-réaction de 2pF et une résistance de 100M Ω , on va donc mesurer un signal de 120mV qui va décroître en 200 μs . Il est toujours bon de vérifier ces aspects à l'oscilloscope. Un point de détail, les préamplificateurs de charges sont généralement faits pour attaquer une charge haute impédance (typ. quelques k Ω , l'impédance d'entrée de l'amplificateur de spectroscopie). Il convient donc de laisser l'oscilloscope en mode haute impédance.

8.3.2.2 Bruit

Sur le modèle en bruit (dans lequel on n'a pas fait figurer la capacité de découplage C_{dec} qui laisse passer les impulsions et le filtrage de la haute tension, Chv et Rhv) on peut constater qu'il y a deux grandes familles de générateur de bruit.

1. Le générateur de bruit en tension du préamplificateur, de densité spectrale Se_{OA} . Il est tout seul...

$$Se = Se_{OA}$$

Ce générateur de bruit doit donc être minimal. On l'appelle générateur de bruit série.

2. Tous les générateurs de bruit en courant qui sont en parallèle. On les appelle générateurs de bruit parallèle. Leurs densités spectrales s'ajoutent directement pour former un unique générateur de bruit de densité spectrale Si :

$$Si = 2e \cdot I_{rev} + \frac{4kT}{R_p} + \frac{4kT}{R_f} + Si_{OA-}$$

On peut tirer déjà quelques conclusions importantes à ce point. Il conviendra de sélectionner attentivement les transistors d'entrée pour limiter l'incidence de Se_{OA} au strict minimum... Par ailleurs, il convient de choisir attentivement, à la fois, l'amplificateur opérationnel et les éléments de contre-réaction ou de polarisation de façon à ce que le générateur de bruit soit majoré par le bruit du courant inverse (quand il y en a, i.e. pour les détecteurs solides), ce qui conduit à deux conditions :

$$Si_{OA-} \ll 2e \cdot I_{rev} \qquad R \gg \frac{2kT}{e \cdot I_{rev}}$$

Par la suite, nous considérerons que ces deux conditions sont vérifiées. Par exemple, pour un détecteur dont le courant inverse vaut 1nA, il convient de choisir un transistor (ou un amplificateur opérationnel) pour lequel $Si_{OA-} \ll 18\text{fA.Hz}^{-1/2}$ et des résistances, R_f et R_p , très supérieures à $50\text{M}\Omega$, pour ne pas dégrader les performances propres du détecteur.

On comprend dès lors que détecteurs de spectroscopie sont refroidis. En effet, le courant inverse des détecteurs solides (silicium ou germanium) diminue globalement d'un facteur 2 tous les 7°K . La conséquence directe est une dépendance très importante du courant inverse, donc du bruit, à la température du détecteur. Le bruit des résistances ne dépend, quant à lui, que linéairement de la température.

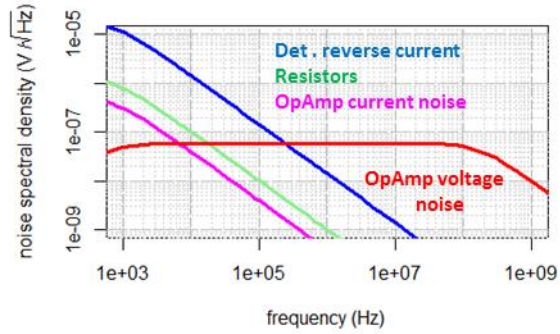
Le bruit derrière le préamplificateur de charges

En utilisant les techniques de calcul évoquées plus haut, on sait évaluer la densité spectrale de bruit en tension en sortie du préamplificateur de charges, Se_{Csp} . Celle-ci vaut, en supposant, le préamplificateur idéal:

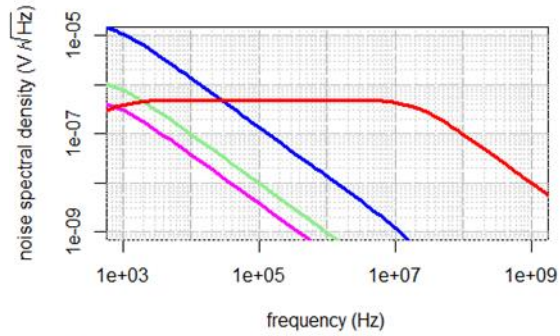
$$Se_{Csp} = |Z_f|^2 \cdot Si + \left| 1 + \frac{Z_f}{Z_d} \right|^2 \cdot Se$$

Les graphes ci-dessous illustrent la densité spectrale de bruit, en sortie de préamplificateur de charges, pour des situations caricaturales, mais classiques d'instrumentation. On a admis ici que le préamplificateur n'était pas parfait et présentait un produit *gain x bande* de 1GHz. Les données de base sont à gauche. En bleu, la contribution au bruit du courant inverse, en vert, celle des résistances (identiques), en magenta, le générateur de courant de bruit du préamplificateur, en rouge, le générateur de tension de bruit du préamplificateur.

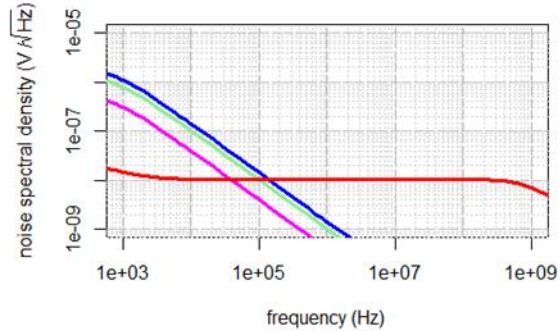
Rf <- 100e6 # W
 Cf <- 2e-12 # F
 Rin <- 100e6 # W
 Cin <- 10e-12 # F
 linv <- 100e-9 # A
 Si.oa <- 5e-15 # A/Hz^{1/2}
 Se.oa <- 10e-9 # V/Hz^{1/2}
 Aol <- 1000 # 1
 fol <- 1e6 # Hz



Rf <- 100e6 # W
 Cf <- 2e-12 # F
 Rin <- 100e6 # W
 Cin <- 100e-12 # F
 linv <- 100e-9 # A
 Si.oa <- 5e-15 # A/Hz^{1/2}
 Se.oa <- 10e-9 # V/Hz^{1/2}
 Aol <- 1000 # 1
 fol <- 1e6 # Hz



Rf <- 100e6 # W
 Cf <- 2e-12 # F
 Rin <- 100e6 # W
 Cin <- .1e-12 # F
 linv <- 1e-9 # A
 Si.oa <- 5e-15 # A/Hz^{1/2}
 Se.oa <- 10e-9 # V/Hz^{1/2}
 Aol <- 1000 # 1
 fol <- 1e6 # Hz



On constate que, si les « intensités » des générateurs de bruit exprimées en sortie sont très variables, la forme générale des courbes est toujours la même. On a toujours veillé à ce que les résistances et l'amplificateur contribuent moins au bruit en courant que le courant inverse du détecteur. Concernant, le générateur de bruit du préamplificateur, on ne peut faire que le subir. Dans ces conditions, la densité spectrale de bruit exprimée en sortie du préamplificateur peut globalement s'approximer par :

$$Se_{csp} \approx \left| \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_f} \right|^2 \cdot Si + \left| 1 + \frac{C_d}{C_f} \right|^2 \cdot Se$$

On remarque que tous les générateurs de bruit sont « amplifiés » par $1/C_f$. C'est normal, le signal l'est également, donc, la capacité de contre-réaction n'a globalement aucune action en termes de rapport signal à bruit. En fait, il faut quand même qu'elle amplifie le signal, mais à part ça, elle ne fait que gérer la bande passante du système bouclé. Par contre, le générateur de bruit en tension est gouverné par la capacité détecteur (détecteur + câble). Plus celle-ci sera grande, plus le bruit sera élevé... nous verrons cela en détails plus loin.

Par ailleurs, on remarque également que le bruit n'est pas blanc à la sortie du préamplificateur de charges, d'où le titre de ce chapitre.

8.3.2.3 Synthèse, sortie de préamplificateur de charges

A la sortie du préamplificateur de charges, on pourrait se contenter, si on ne connaissait pas le traitement du signal, de prendre comme mesure l'amplitude du signal, qui est approximativement un échelon de tension d'amplitude Q/Cf . On aurait un résultat proportionnel à la charge. Fort heureusement, on sait maintenant qu'il faut se méfier de la facilité et qu'il y a parfois de jolis gains à faire au prix d'un peu de complexité...

Pour le prouver, calculons d'abord la charge équivalente en bruit en sortie du préamplificateur de charges si on procédait comme cela sur l'un des exemples ci-dessus. Prenons $Cf=2\text{pF}$, $Rf=100\text{M}\Omega$, $Cd=10\text{pF}$, $Rp=100\text{M}\Omega$, $Irev=100\text{nA}$ (premier exemple). Le bruit en courant est ici majoritairement gouverné par le détecteur (attention, ça n'est pas toujours le cas, en particulier avec les chambres à ionisation) et vaut donc $\sqrt{Si} = \sqrt{2e \cdot Irev} \approx 180\text{fA} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$. Il est multiplié par Rf et filtré passe-bas à la pulsation de coupure $1/RfCf$. Sa contribution à la sortie du préamplificateur de charges vaut donc

$$Rf \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot f_{-3dB} \cdot Si} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{Rf}{Cf} \cdot Si}$$

Soit, approximativement $0.63\text{mV}_{\text{RMS}}$.

Le générateur de tension de bruit, de densité spectrale $Se=10\text{nV} \cdot \text{Hz}^{-1/2}$ est multiplié par $1 + Cd/Cf=6$ puis filtré passe-bas avec une fréquence de coupure à -3dB de l'ordre de $GBP \cdot Cf/Cd \approx 200\text{MHz}$. Sa contribution à la sortie vaut approximativement :

$$\left(1 + \frac{Cd}{Cf}\right) \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot GBP \cdot \frac{Cf}{Cd} \cdot Se} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2} \cdot GBP \cdot \frac{Cd}{Cf} \cdot Se}$$

Soit, approximativement $1.77\text{mV}_{\text{RMS}}$.

La valeur efficace de bruit en sortie du préamplificateur de charges vaut donc $0.63 \oplus 1.77 \approx 1.9\text{mV}_{\text{RMS}}$. On a vu qu'un α de 5.5MeV produisait un créneau de tension de 120mV , soit une charge équivalente en bruit de $(1.9\text{mV} / 120\text{mV} \times 5500\text{keV}) = 87\text{keV}_{\text{RMS}}$. C'est très honorable, mais on va pouvoir faire mieux...

8.3.3 Traitement du signal dans l'amplificateur de spectroscopie

Comment améliorer le rapport signal à bruit ? La réponse est « simple », on a un signal qu'on sait exprimer, dans un bruit qu'on sait calculer, on saura donc trouver le filtre optimal qui nous donnera les meilleurs résultats...

8.3.3.1 Filtrage optimal

Le problème du filtre optimal se pose toujours en ces termes : quel filtre, de fonction de transfert H et de réponse impulsionnelle $h(t)$ pourrions-nous construire qui optimiserait le rapport signal à bruit à sa sortie ? La démonstration est un peu technique, mais très intéressante à pratiquer car tout à fait générale. Pour ne pas alourdir inutilement les notations, nous prendrons par la suite $e(t) = v_{cSP}(t)$ (la tension de sortie du

préamplificateur de charges) et $s(t) = v_{AS}(t)$ (la tension de sortie de l'amplificateur de spectroscopie); pour les densités spectrales S_{in} est la densité spectrale à l'entrée du filtre, donc en sortie de l'amplificateur de spectroscopie. E et S sont respectivement les transformées de Fourier de l'entrée et de la sortie.

- On commence par exprimer le signal en sortie de l'amplificateur de spectroscopie à un instant $t = \theta$ (c'est l'instant où on va capturer le signal). Sa valeur est la transformée de Fourier inverse de $E \cdot H$ prise à $t = \theta$:

$$s(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot H \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta) \cdot df$$

- On exprime le bruit. Pour cela, on prend l'approximation de la densité spectrale de bruit en sortie du préamplificateur de charges, on sait qu'elle passe à travers le filtre qu'on cherche. La densité spectrale de bruit en sortie de l'amplificateur de spectroscopie est donc le produit de la première par le module de la fonction de transfert au carré. La valeur efficace de bruit vaut donc :

$$S_{RMS} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{in} \cdot |H|^2 \cdot df} = \sqrt{\int_0^{\infty} \left(\left| \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_f} \right|^2 \cdot S_i + \left| 1 + \frac{C_d}{C_f} \right|^2 \cdot S_e \right) \cdot |H|^2 \cdot df}$$

- On cherche donc à maximiser :

$$\frac{s(\theta)}{S_{RMS}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot H \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta) \cdot df}{\sqrt{\int_0^{\infty} S_{in} \cdot |H|^2 \cdot df}} = \sqrt{2} \cdot \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot H \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta) \cdot df}{\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} S_{in} \cdot |H|^2 \cdot df}}$$

Pour atteindre cet objectif, on peut appliquer le raisonnement déjà réalisé dans les paragraphes précédents (avec l'inégalité de Schwartz) et on trouve :

$$H_{\infty} = \frac{E^*}{S_{in}} \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta)$$

Où E^* est le complexe conjugué de E . Le terme dans l'exponentielle est un retard pur de durée θ qui n'a aucune importance ici. Le signal S , en sortie du filtre est donc la transformée de Fourier inverse du produit de H_{∞} par E :

$$S = \frac{|E|^2}{S_{in}} \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta)$$

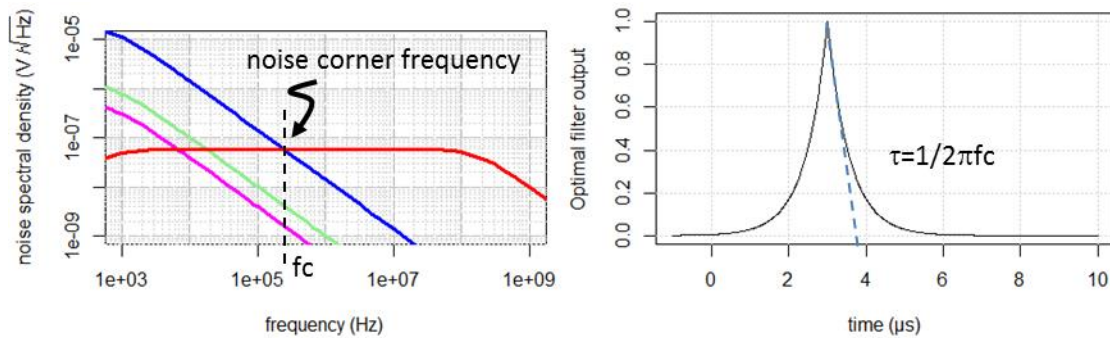
Il ne nous reste donc plus qu'à exprimer la transformée de Fourier (étendue aux distributions) du signal d'entrée. C'est, en première approximation est un échelon de tension d'amplitude Q/C_f dont la transformée de Fourier vaut $\frac{Q}{j \cdot 2\pi \cdot f \cdot C_f}$. On a donc :

$$S \propto \frac{1}{(2\pi \cdot f)^2 + \frac{S_i}{S_e \cdot (C_d + C_f)^2}} \cdot \exp(-j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta)$$

Expression qui admet pour transformée de Fourier inverse :

$$s(t) = \exp\left(|t - \theta| \cdot \sqrt{\frac{S_i}{S_e \cdot (C_d + C_f)^2}}\right)$$

Nous n'avons pas, à proprement parler, exprimé le filtre optimal, mais plus précisément, sa réponse en sortie de l'amplificateur de spectroscopie. Celle-ci est illustrée sur la figure suivante dans le cas qui nous sert d'exemple d'analyse :



La réponse à un échelon en sortie de préamplificateur de charges (pour un temps de capture $\theta=3\mu s$) est donc constituée de deux arches d'exponentielles, dont on mesurera la maximum. On constate également que la constante de temps caractéristique τ (encore appelé temps de mise ne forme ou shaping time) de ces arches correspond précisément au point de croisement de la densité spectrale de bruit en courant et de la densité spectrale de bruit en tension. Ce point précis porte le nom de fréquence charnière de bruit.

Mesurer la charge va donc revenir à « attraper » le maximum de l'impulsion en sortie de l'amplificateur de spectroscopie.

Dans le cas où le bruit en courant est majoré par le générateur de bruit du courant inverse dans le détecteur, et pour des capacités détecteur plus élevées que la capacité de contre-réaction, on peut donc exprimer la constante de temps caractéristique par :

$$\tau \approx C_d \cdot \sqrt{\frac{Se}{2e \cdot I_{rev}}}$$

Soit, dans notre exemple, $\tau \approx 670ns$.

On remarque que plus le détecteur est capacitif, plus le temps de mise en forme est grand. Il dépend par ailleurs du courant inverse dans le détecteur et, lorsque celui-ci devient négligeable, du bruit des résistances entourant l'appareil.

On peut également s'intéresser aux performances spectroscopiques du filtre optimal puisque c'est, en définitive, le cœur du problème. Pour cela, il faut se rappeler que la charge équivalente en bruit (ENC) correspond à la charge pour laquelle le rapport signal à bruit vaut précisément 1. En menant au bout le calcul du rapport signal à bruit du démarrage, nous obtenons :

$$\frac{s(\theta)}{s_{RMS}} = \frac{Q}{\sqrt{(C_d + C_f) \cdot \sqrt{Se \cdot Si}}}$$

Dont on conclut que la charge équivalente au bruit vaut :

$$ENC_{\infty} = \sqrt{(C_d + C_f) \cdot \sqrt{Se \cdot Si}}$$

C'est un joli résultat dont la simplicité est remarquable. Pour le détecteur de notre exemple, nous obtiendrions 0,147fC, soit 920 charges équivalentes en bruit. S'il s'agit d'un détecteur silicium, il convient de multiplier ce chiffre par l'énergie de création d'une paire électron-trou, soit $\omega=3.6\text{eV}$ pour avoir la charge équivalente au bruit du système filtré. Ici, approximativement 3.3keV. Pour mémoire, le bruit à la sortie du préamplificateur de charges était de l'ordre de 90keV. On a donc bien amélioré l'incertitude de mesure !

En termes de bruit, il n'est pas possible de faire mieux que cela avec ce détecteur et ce préamplificateur. Si ça n'est pas suffisant pour l'application envisagée, il faut

- Ou bien trouver un détecteur moins capacitif (il faisait 10pF) et réduire la capacité de contre-réaction.
- Ou bien changer de préamplificateur de charges (il gouverne le Se).
- Ou bien refroidir le détecteur pour réduire son courant inverse (on était à 100nA).

C'est bien entendu sur ce dernier point qu'on dispose de la meilleure marge de progression. Le courant inverse diminue globalement d'un facteur 2 tous les 7°C. En passant, par exemple de la température ambiante à -30°C, on gagne 50°C et le courant baisse approximativement d'un facteur 2⁷. Il est alors inférieur au nano ampère, ce qui améliore la ENC d'un facteur 3.

Les très bons systèmes de spectroscopie sont précisément optimisés sur tous les aspects possibles. Dans ces conditions, on parvient à des charges équivalentes en bruit de l'ordre de la centaine d'eV_{RMS}.

Enfin, on ne mettra jamais assez en garde sur les méfaits des capacités parasites ou du câble d'accès au détecteur. Quand on a la chance de disposer d'un détecteur faiblement capacitif, il est nécessaire de faire la chasse à toutes les capacités qui vont se trouver en parallèle de celui-ci, au risque de ruiner ses performances très rapidement. En effet, la ENC est globalement proportionnelle à $\sqrt{C_d}$.

8.3.3.2 Méthodologie d'étude des filtres

L'exploitation de la théorie du filtre optimal se heurte à sa réalisabilité. Même s'il est possible de le construire concrètement en électronique numérique, quoique ce soit relativement complexe, cela ne l'est pas en électronique analogique. Il nous manque donc des outils pratiques permettant de comparer efficacement la réponse d'un filtre quelconque à la réponse du filtre optimal. Il ne s'agit plus ici de définir un filtre optimal, mais bel et bien de mesurer la « distance » d'un filtre au filtre optimal, ce qui est beaucoup plus simple quand on a effectué tout le travail ci-dessus (c'était d'ailleurs son principal intérêt). En définitive, ce que l'on cherche à faire est de mesurer la distance d'un filtre physiquement réalisable, et qui produirait une sortie donnée, par rapport au filtre optimal. Pour cela, nous pouvons revenir à la définition originale du rapport signal à bruit et la réécrire un peu différemment. Si nous acceptons de laisser tomber le problème du filtre au profit de la description temporelle de sa réponse à un échelon de tension, nous pouvons bénéficier d'une formulation tout à fait utile au regard du problème qui se pose à nous. On va savoir, sans trop de difficultés calculer la réponse d'un filtre à un échelon de tension (la sortie du préamplificateur de charges). Reprenons le rapport signal à bruit :

$$\frac{s(\theta)}{S_{RMS}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} E \cdot H \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot f \cdot \theta) \cdot df}{\sqrt{\int_0^{\infty} \left(\left| \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C_f} \right|^2 \cdot Si + \left| 1 + \frac{C_d}{C_f} \right|^2 \cdot Se \right) \cdot |H|^2 \cdot df}}$$

On se souvient de l'identité de Parseval :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |S(f)|^2 \cdot df = \int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 \cdot dt$$

Qui stipule qu'il y a autant d'énergie dans le domaine fréquentiel que dans le domaine temporel. On sait exprimer la sortie :

$$s(t) = \mathcal{F}^{-1}(E \cdot H) = \frac{Q}{C_f} \cdot \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{j \cdot 2\pi \cdot f} \cdot H\right)$$

Dont on tire

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{Q}{C_f} \cdot \mathcal{F}^{-1}(H)$$

Et on réinjecte tout cela dans le rapport signal à bruit, pour obtenir

$$\frac{S_{max}}{S_{RMS}} = \sqrt{2} \cdot \frac{Q \cdot \max(s(t))}{\sqrt{S_i \cdot \int_0^{\infty} (s(t))^2 \cdot dt + S_e \cdot (C_d + C_f)^2 \cdot \int_0^{\infty} \left(\frac{ds(t)}{dt}\right)^2 \cdot dt}}$$

Dont l'intérêt ne paraît pas évident de prime abord.

En fait, il ressort clairement, quand on admet qu'on dispose du signal en sortie de l'amplificateur de spectroscopie. Calculer le rapport signal à bruit revient « simplement » à savoir intégrer ce signal ou sa dérivée, ce qui est enfantin en calcul numérique. Nous allons illustrer tout cela dans le cas du filtre de type CR-RC, en détails, puis nous analyserons d'autres filtres usuels en spectroscopie nucléaire.

Le filtre CR-RC.

C'est le plus simple qu'il soit possible de réaliser. Il est constitué d'une cellule de filtrage passe-haut (une capacité et une résistance connectée à la masse), suivie d'une cellule de filtrage passe-bas (une résistance et une capacité connectée à la masse). Sa fonction de transfert s'écrit (quand les constantes de temps sont égales) :

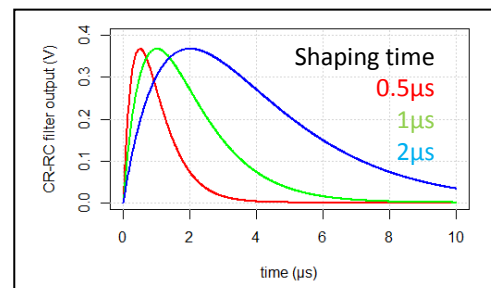
$$H_{CR-RC} = \frac{\tau \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

Sa réponse à un échelon de tension (qui s'écrit $1/p$ dans le domaine de Laplace) permet d'écrire le signal de sortie dans le domaine temporel :

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{Q}{p \cdot C_f} \cdot \frac{\tau \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^2}\right) = \frac{Q}{C_f} \cdot \frac{t}{\tau} \cdot \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Le seul levier dont nous disposons ici est le temps de mise en forme τ du filtre. La figure ci-contre illustre la sortie que nous observerions en injectant sur l'entrée un échelon de tension de 1V, pour différents choix de temps de mise en forme.

Les signaux ont tous la même amplitude qui vaut $\exp(-1)$. Les extrema sont situés à $t = \tau$.



On trouve sans peine les intégrales qui nous intéressent :

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{t}{\tau}\right)^2 \cdot \exp\left(-2 \cdot \frac{t}{\tau}\right) \cdot dt = \frac{\tau}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau^2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)^2 \cdot \exp\left(-2 \cdot \frac{t}{\tau}\right) \cdot dt = \frac{1}{4 \cdot \tau}$$

Qu'on replace dans le rapport signal à bruit pour obtenir finalement :

$$\frac{S_{max}}{S_{RMS}} = \sqrt{2} \cdot \frac{Q \cdot \exp(-1)}{\sqrt{Si \cdot \frac{\tau}{4} + Se \cdot (C_d + C_f)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \tau}}}$$

La charge équivalente en bruit vaut donc :

$$ENC = \frac{\exp(1)}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{Si \cdot \frac{\tau}{4} + Se \cdot (C_d + C_f)^2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \tau}}$$

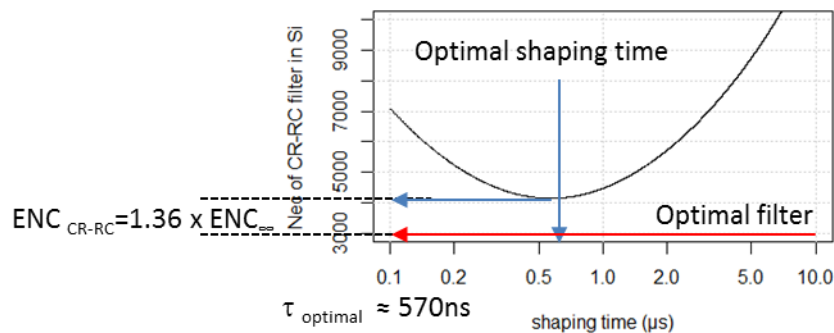
Cette expression admet un minimum pour le temps de mise en forme optimal, situé à

$$\tau_{opt} = (C_d + C_f) \cdot \sqrt{\frac{Se}{Si}}$$

Et à ce minimum, la charge équivalente en bruit vaut :

$$ENC_{CR-RC} = \frac{\exp(1)}{2} \cdot \sqrt{(C_d + C_f) \cdot \sqrt{Se \cdot Si}} = \frac{\exp(1)}{2} \cdot Nec_{\infty}$$

Tous ces résultats sont explicités dans le graphe suivant :



Nous pouvons dès lors déduire quelques conclusions intéressantes qui sont globalement vraies pour tous les filtres que nous allons analyser ou utiliser :

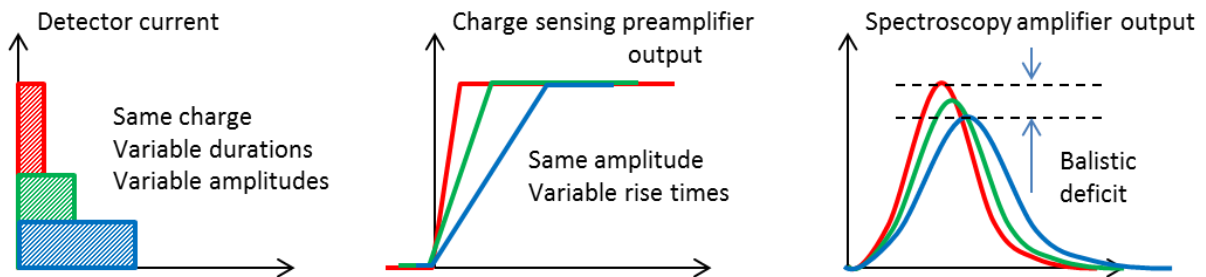
- Il y a toujours un temps de mise en forme optimal. C'est lui qu'on modifie, expérimentalement, pour améliorer la charge équivalente en bruit à la sortie de l'amplificateur de spectroscopie.
- Trop faible, il favorise le bruit en tension (provenant du préamplificateur), trop grand, il favorise le bruit en courant (provenant du détecteur).
- La « cuvette » du réglage optimal est relativement large. On augmente typiquement le bruit de 10% quand on se trompe d'une octave sur le temps optimal.
- A l'optimum, la forme fonctionnelle du bruit ressemble à s'y méprendre à celle du filtre optimal. Le coefficient multiplicateur indique la dégradation d'incertitude à laquelle conduit le choix de notre amplificateur par rapport au filtre optimal. Ici, $\exp(1)/2 = 1.36$. Cela signifie que le filtre CR-RC laisse passer 36% de bruit en plus par rapport au meilleur filtre qu'on puisse réaliser.

Armés de ces éléments d'analyse, il est à présent temps de faire un tour dans la boîte à outil des filtres utiles en spectroscopie. Mais avant cela, il convient de prêter attention à deux phénomènes dont nous n'avons pas encore parlé ; le déficit balistique et l'empilement.

8.3.3.3 Gestion du déficit balistique

Les « gros » détecteurs solides (HpGe) et certains détecteurs gazeux produisent des signaux qui ne sont homothétiques qu'en première approximation. Ces « signaux à problèmes » sont typiquement ceux qui ont servi à illustrer le début de ce chapitre. Ils ont généralement une importante variabilité en temps de montée qui, si elle n'affecte pas la charge totale déposée, va avoir des conséquences sur la qualité spectroscopique, si on n'y prête pas gare. Ce phénomène est référencé sous le nom de déficit balistique. Il se modélise ou se simule parfaitement et sa maîtrise est indispensable pour qui veut utiliser le genre de détecteurs mentionnés plus haut.

La figure ci-dessous illustre l'origine et les conséquences du déficit ballistique sur un détecteur hypothétique qui produirait, non pas des impulsions de Dirac, mais des créneaux de courant, de largeur variable, mais de surface fixe (même énergie déposée) :



Pour évaluer l'amplitude du déficit balistique, il faut disposer d'un modèle des signaux dans le détecteur. On peut alors écrire la réponse en sortie de l'amplificateur de spectroscopie. Dès lors, la réponse du filtre à ce type d'entrée particulier est la convolution de la forme du courant par la réponse impulsionnelle, ou bien encore, la transformée de Fourier inverse du produit des transformées de Fourier des deux signaux. Dans le cas simple de signaux carrés de durée θ , on peut écrire :

$$i(t) = \frac{Q}{\theta} \cdot \Pi_{\theta} = \frac{Q}{\theta} \cdot (H(t=0) - H(t=\theta))$$

Dès lors, si on appelle $m(t)$ la sortie de l'amplificateur de spectroscopie, soumis à une impulsion de Dirac en courant à l'entrée du préamplificateur de charges, alors, le signal qu'on va observer sera de la forme :

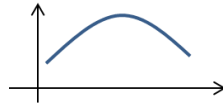
$$v_{SA}(t) = \frac{Q}{\theta \cdot C_f} \cdot \Pi_{\theta} * m(t) = \frac{Q}{\theta \cdot C_f} \cdot \int_{t-\theta}^t m(t) \cdot dt$$

A son sommet, la réponse impulsionnelle de la chaîne admet un développement limité qui dépend précisément de la nature de celle-ci. Nous allons distinguer trois cas de figure :

Filtres à réponse impulsionnelle aigüe



Filtre à réponse impulsionnelle arrondie



Filtres à réponse impulsionnelle plate



Leurs développements limités au sommet situé à $ts = 0$ vaut :

$$m \approx \begin{cases} 1 + \xi \cdot \frac{ts}{\tau} & \text{avant } ts = 0 \\ 1 - \xi \cdot \frac{ts}{\tau} & \text{après } ts = 0 \end{cases}$$

$$m \approx 1 - \frac{1}{2} \cdot \xi \cdot \left(\frac{ts}{\tau}\right)^2$$

$$m = 1 \text{ sur la durée } \theta$$

Où τ correspond au temps de mise en forme (dont la définition varie d'un filtre à l'autre) et ξ est spécifique à la forme du filtre au sommet (indépendamment de son temps de mise en forme).

L'erreur de spectroscopie vaut donc :

$$\frac{v_{SA\Pi}}{v_{SA\delta}} \approx 1 - \frac{\xi}{4} \cdot \frac{\theta}{\tau}$$

$$\frac{v_{SA\Pi}}{v_{SA\delta}} \approx 1 - \frac{\xi}{24} \cdot \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2$$

$$\frac{v_{SA\Pi}}{v_{SA\delta}} \approx 1$$

Il faudrait bien entendu décliner les paramètres pour chaque type particulier de filtre, mais les grandes lignes sont là pour le moment.

- Les filtres à réponse impulsionnelle aigüe (filtre optimal ou filtre triangulaire) ont une dépendance directe au déficit balistique. Ils doivent être impérativement réservés aux signaux qui ont des temps de montée fixe et qui sont rigoureusement homothétiques.
- Les filtres à réponse impulsionnelle arrondie (type CR-RCn, ou plus généralement les filtres analogiques) sont relativement robustes sur cet aspect. Il faut avant tout veiller à privilégier des temps de mise en forme compatibles avec le déficit balistique pour neutraliser le problème efficacement
- Les filtres à réponse impulsionnelle plate (filtre trapézoïdal) sont insensibles au déficit balistique, pourvu qu'on prenne la précaution de prendre un plateau dont la durée est supérieure à la variabilité de temps de montée. On notera qu'en augmentant la durée de plateau, on dégrade nécessairement la résolution de l'équipement... Tout est question d'optimisation.

Dans le paragraphe consacré à l'analyse des filtres de spectroscopie, nous spécifierons à chaque fois le modèle de déficit (linéaire ou quadratique) et la variabilité de temps de montée qui conduit à une erreur de spectroscopie ne dépassant pas 1%. C'est un chiffre élevé, mais le modèle d'impulsions carrées utilisé est très défavorable.

8.3.3.4 Empilement

Enfin, quel que soit le détecteur, les signaux qu'on observe sont sujets au phénomène d'empilement qui a la surprenante particularité de faire apparaître des pics qui n'existent pas... En pratique, quand le taux de comptage, ou plus précisément l'intervalle de temps moyen entre impulsions, n'est plus négligeable devant le

temps de mise en forme, les impulsions vont se chevaucher et le système d'acquisition va, en toute bonne foi, prendre ces empilements pour de la physique, ce qu'ils ne sont pas, bien entendu.

On peut voir le problème de l'empilement sous deux angles différents. On peut se demander en premier lieu à partir de quel moment, ou plus précisément, à quel taux de comptage, on commence à avoir des problèmes. Pour cela, on peut admettre en première approximation que nos impulsions ont une durée caractéristique notée τ durant laquelle on ne souhaite pas qu'une autre impulsion apparaisse (ça peut être, par exemple la largeur à mi-hauteur du signal). Dès lors, si le taux de comptage vaut n (exprimé en coups par seconde), alors, le taux de coïncidences fortuites vaut :

$$n_{fortuites} = 2 \cdot \tau \cdot n^2$$

Ainsi, si nous avons 10.000 coups par secondes et une durée d'impulsions de $1\mu s$, alors 200 impulsions seront empilées toutes les secondes, soit 2% des coups enregistrés. Les 98% restants ne sont pas affectés par l'empilement.

Une seconde approche, plus subtile, consiste à utiliser le théorème de Campbell: si on observe un spectre de particules dont la charge moyenne déposée vaut \bar{Q} , supportées par une impulsion de forme $m(t)$ et arrivant avec un débit n , alors le spectre se décale et s'élargit des quantités suivantes :

$$\Delta v = n \cdot \frac{\bar{Q}}{cf} \cdot \int m(t) \cdot dt \qquad \sigma_v = \sqrt{n \cdot \frac{\bar{Q}^2}{cf^2} \cdot \int m^2(t) \cdot dt}$$

Il ne faut pas trop prendre à la lettre ces résultats qui sont très pessimistes. En effet, le décalage n'affecte que les coups empilés (qui peuvent aller de la hauteur d'un pic à deux fois la hauteur de ce pic), mais ils peuvent se trouver légèrement décalés et il faut en avoir conscience, en particulier lors de la calibration. Dans l'analyse des filtres qui va suivre, nous spécifierons donc le décalage de spectre consécutif à l'empilement. Cela permettra de comparer les filtres entre eux, en prenant en compte un critère objectif sur la forme du signal.

Enfin, on peut passer des heures à discuter des mérites comparés de tel ou tel filtre par rapports à ses concurrents alors qu'une solution existe bel et bien. Il s'agit du réjecteur d'empilement, qui a quand même ses limites. Le principe en est très simple. On prend le signal issu du préamplificateur de charges qu'on passe dans un filtre rapide (quelques centaines de nanosecondes). Lorsqu'une impulsion dépasse le seuil, il va surveiller qu'une autre impulsion ne se présente pas pendant la durée τ . Si c'est le cas, on sort le résultat, sinon, on le marque comme empilé. L'idée sous-jacente est que le temps mort du filtre rapide est beaucoup plus court que celui du filtre de spectroscopie, disons d'un facteur 10, par exemple, et on gagne donc ce facteur en termes de détection d'empilements. Attention néanmoins, comme ce filtre est éloigné de la mise en forme optimale, ses performances en bruit sont moins bonnes. Par conséquent, le seuil de déclenchement est naturellement plus haut que s'il était configuré sur la voie de spectroscopie.

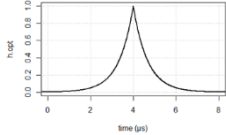
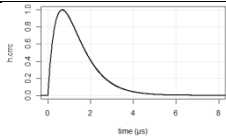
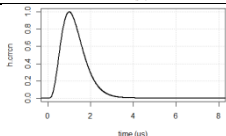
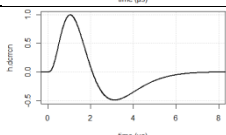
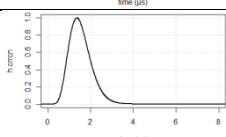
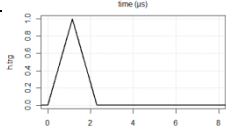
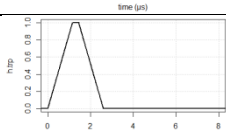

Il peut être alors utile d'éviter que le détecteur « voit » trop de basses énergies que nous ne saurions mesurer, en blindant, par exemple, sa face avant pour ne laisser majoritairement passer que les hautes énergies. En effet, ça n'est pas parce que nous ne déclenchons sur les basses énergies que celles-ci ne sont pas présentes sur le signal et pourraient affecter celui-ci.

8.3.3.5 Les filtres usuels en spectroscopie

Le tableau ci-dessous dresse une synthèse des filtres usuels en spectroscopie nucléaire en rappelant, à chaque fois,

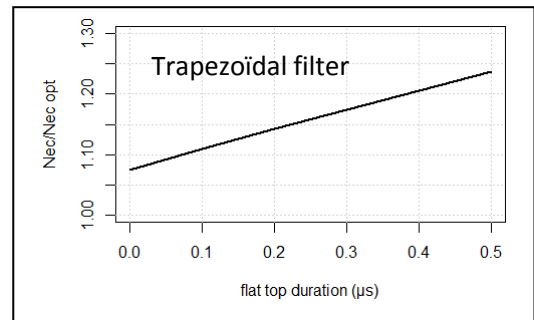
- Les performances en bruit comparées au filtre optimal
- La définition utilisée (ici) pour le temps de mise en forme
- Le temps de capture du maximum
- La largeur à mi-hauteur des impulsions
- La durée de celles-ci à 1% de la hauteur maximale
- L'intégrale d'empilement
- Le modèle de déficit balistique
- La variation tolérée de temps de montée (en sortie de préamplificateur de charges) pour ne pas dégrader la spectroscopie de plus de 1%.

Tous les filtres ont été optimisés pour notre exemple test.

signal	noise	Timing properties				Pile-up	Balistic deficit	
		Charact. Shaping Time	Peaking time	Pulse FWHM	Base duration at 1%		Pile-up	Balistic deficit
Filter output shape	Noise perf.							
	$\frac{ENC}{ENC_{\infty}}$	τ				$\int m$	$a \cdot \frac{\theta}{\tau}$ $b \cdot \left(\frac{\theta}{\tau}\right)^2$	θ
	Optimal filter							
	1.00	0.67μs	N.A.	0.92μs	6.16μs	1.34.10 ⁻⁶	-0.26 0	26ns
	CR-RC							
	1.36	0.67μs	0.67μs	1.63μs	5.1μs	1.82.10 ⁻⁶	0 -0.04	335ns
	CR-RC4							
	1.16	0.25μs	1.0μs	1.17μs	3.22μs	1.28.10 ⁻⁶	0 -0.01	250ns
	Derivative CR-RC4							
	1.36	0.52μs	1.0μs	N.A.	7.21μs	0	0 -0.04	260ns
	Pseudo-gaussian							
	1.14	0.17μs	1.36μs	1.13μs	3.01μs	1.21.10 ⁻⁶	0 -0.005	240ns
	Triangular filter							
	1.075	1.15μs	1.15μs	1.15μs	2.26μs	1.15.10 ⁻⁶	-0.26 0	44ns
	Trapezoidal filter (top=300ns)							
	1.17	1.15μs	1.45μs	1.45μs	2.56μs	1.45.10 ⁻⁶	0 0	350ns

Quelques commentaires s'imposent.

- Le filtre CR-RC est probablement le moins bon choix en termes de spectroscopie. Sa popularité vient de la simplicité qu'il y a à le fabriquer. Son coût ne doit guère dépasser quelques Euros !
- Les filtres analogiques plus complexes (CR-RCn) constituent un bon choix lorsqu'on cherche les performances. Il n'y a guère besoin de beaucoup de cellules d'intégration pour approcher du filtre optimal.
- Le filtre dérivé de CR-RC4 est donné ici en illustration de ce qu'il se passe lorsqu'on s'éloigne trop du filtre optimal. On dégrade singulièrement la résolution. Par contre, comme il coupe le continu, il est virtuellement insensible à l'empilement (ça n'est pas exactement vrai, l'intégrale d'empilement n'est qu'un point de vue particulier assez simpliste)
- Le filtre trapézoïdal et son petit frère, le filtre triangulaire ont des performances en bruit parmi les meilleures. Cerise sur le gâteau, ils sont particulièrement faciles à implanter numériquement, ce qui est moins vrai de leurs homologues « analogiques ». Le filtre trapézoïdal, de par son sommet plat, est virtuellement insensible au déficit balistique, tant que le sommet est plus long que la variabilité des temps de montée. C'est un outil de choix pour les détecteurs de gros volume. Il convient quand même de noter que la résolution en énergie se dégrade rapidement quand on augmente la durée de plateau, comme l'illustre le graphe ci-contre. Comme d'habitude, tout est affaire d'optimisation.



8.3.4 Les réglages de l'amplificateur de spectroscopie, en pratique

Nous allons à présent illustrer ce que nous avons vu sur un cas concret, l'optimisation d'une spectroscopie de source alpha au moyen d'un détecteur silicium.

8.3.4.1 Correction de pôle-zéro

Dans toute la théorie du filtrage optimal, nous avons assimilé, pour des raisons de simplification, le signal à un échelon de tension, ce qu'il n'est pas le cas en réalité puisqu'à la sortie du préamplificateur de charges, celui-ci est, en définitive, une exponentielle décroissante. Si on laissait les choses en l'état, cela conduirait à des problèmes complexes d'empilement des impulsions sur la durée de la constante de temps du préamplificateur de charges (centaine de μs, typiquement).

En définitive, pour le moment, nous avons raisonné sur le produit de fonction de transfert suivant :

$$\frac{Q}{p \cdot Cf} \cdot H_{SA} \xleftrightarrow{CR-RC} \frac{Q}{p \cdot Cf} \cdot \frac{\tau \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

Mais ça n'est pas exactement ce que l'on a puisqu'en réalité, Si on prend un « vrai » préamplificateur de charges, nous observerions à la sortie :

$$\frac{Q \cdot Rf}{1 + p \cdot RfCf} \cdot \frac{\tau \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

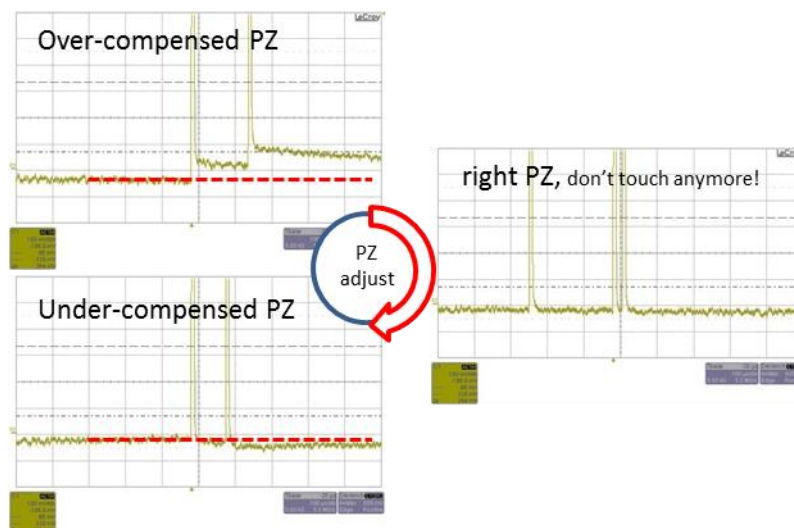
Pour que cela soit conforme à la fonction recherchée, il faut appliquer un correcteur qui va neutraliser le pôle « mal placé » du préamplificateur de charges (au dénominateur) au moyen d'un zéro placé au même endroit :

$$\frac{Q \cdot Rf}{1 + p \cdot RfCf} \cdot \frac{1 + p \cdot \text{zéro}}{p} \cdot \frac{\tau \cdot p}{(1 + \tau \cdot p)^2}$$

On ajuste le zéro manuellement jusqu'à élimination du problème, soit $\text{zéro} = RfCf$.

En pratique, on constate également que, dans le cas idéal, la fonction dérivatrice de l'amplificateur de spectroscopie compense la fonction intégratrice du préamplificateur. On peut donc même se passer du premier filtre passe-haut et laisser le compensateur faire le travail à notre place.

Très concrètement, tout bon amplificateur de spectroscopie dispose d'une compensation de pôle-zéro généralement difficile à trouver (on n'aime pas trop que les gens jouent avec, par inadvertance). Pour effectuer le réglage (une fois pour toutes), il suffit de regarder le signal de sortie à l'oscilloscope en prêtant bien attention à ce qu'il se passe au pied des impulsions. Ensuite, on ajuste doucement le réglage jusqu'à ce que les impulsions reviennent le plus vite possible à la ligne de base, comme cela est illustré ci-dessous :



8.3.4.2 Correction de ligne de base

Le correcteur de ligne de base est sans aucun doute l'élément le plus délicat de la chaîne de spectroscopie. Il est souvent mésestimé, mais il a un rôle absolument fondamental : celui de nettoyer tous les « résidus » de variations lentes qui sont passés à travers le filtre de mise en forme et qui ont réapparus après le correcteur de ligne de base. Une étude attentive du couple filtre de mise en forme/correcteur de pôle zéro montrerait que celui-ci laisse passer (très légèrement) le continu et donc les variations lentes qui ne manquent pas d'affecter les composants électroniques. C'est à ce stade qu'intervient le correcteur de ligne de base dont nous avons exposé le principe plus haut.

Un correcteur bien réglé sait se faire oublier car en définitive, il ne fait qu'affiner un travail qui a été largement bien fait avant. S'il est mal réglé, par contre, il peut avoir des conséquences désastreuses. En effet, sa mise en ou hors fonctionnement dépend de l'amplitude des signaux d'entrée. Si son seuil est réglé trop haut, il va

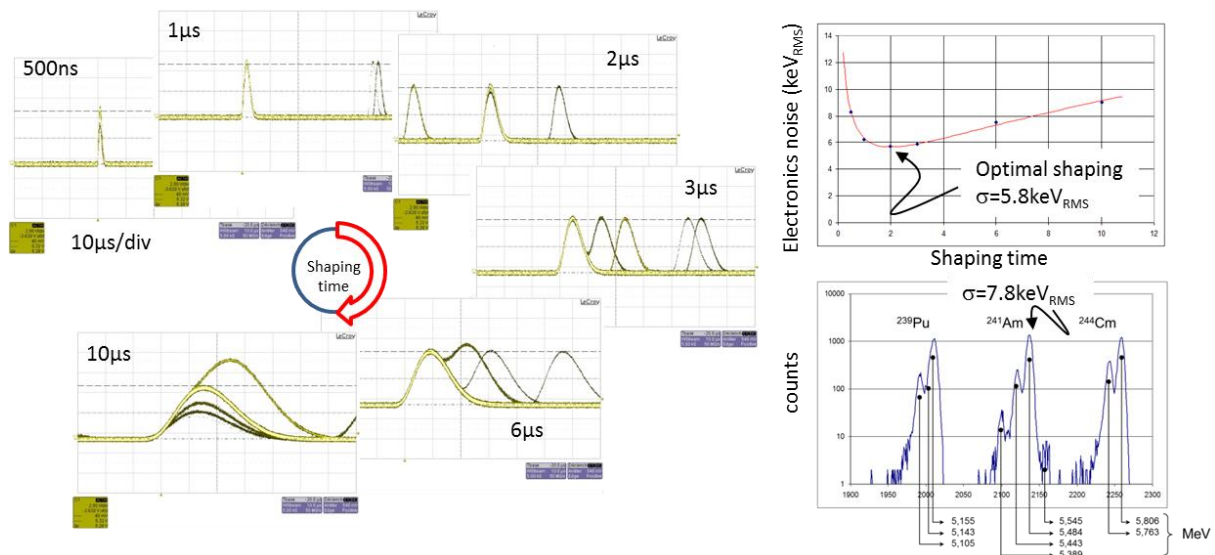
donc traiter différemment les signaux faibles et les signaux élevés ! Une bonne précaution consiste donc à placer son seuil de déclenchement juste au-dessus du bruit...

8.3.4.3 Réglage du temps de mise en forme optimal d'un amplificateur de spectroscopie

Le réglage du temps de mise en forme d'un amplificateur de spectroscopie ne s'opère heureusement pas par calculs, mais est une opération manuelle. Il faut essayer les différentes possibilités jusqu'à trouver la bonne, en mesurant par exemple la résolution d'un pic, ou bien en mesurant le bruit électronique quand on a de la physique « à patates » (i.e. sans pics, ça arrive). La seule chose dont on est sûr, c'est qu'il y a un optimum, quelque part, entre les faibles constantes de temps et les grandes...

- On a réglé au préalable le Pôle-Zéro de l'appareil.
- Puis on règle temps de mise en forme,

Cela est illustré ci-dessous avec, à la fois, les signaux capturés à l'oscilloscope et la résolution en énergie mesurée sur le détecteur silicium qui a permis de faire les figures. Ce détecteur est éclairé par une source α de ^{239}Pu , ^{241}Am & ^{244}Cm :



Ce réglage, opéré à faible taux de comptage, peut ensuite être modifié (généralement on trouve que le temps de mise en forme est trop long !), mais au moins, au sait ce que l'on perd.

On constate, sur cet exercice, que le réglage optimal opéré sur le bruit, n'a pas conduit au même résultat sur la spectroscopie. C'est un fait avéré, la physique aussi fait du bruit... En pratique, l'incertitude combinée fait intervenir de nombreux paramètres. Nous avons vu le bruit électronique, le déficit balistique (il n'y en a pas ici) et l'empilement (il n'est pas mesurable dans ce cas précis), et il faut ajouter les fluctuations sur le nombre de quanta de charges créées dans le détecteur. La contribution « physique » à l'incertitude de mesure n'est pas contournable. Elle provient de l'interaction même des particules au sein du détecteur. On peut l'observer aisément sur les détecteurs germanium ou silicium en mesurant la résolution des pics observés en spectroscopie.

9 Fourre-tout instrumental

Ce chapitre est destiné à contenir des sujets plus ou moins avancés qui n'ont pas trouvé leur place, en dépit de leur importance, dans les paragraphes précédents. Ils représentent des approfondissements intéressants des thèmes déjà abordés, ou bien des solutions originales et simples aux problèmes généralement rencontrés par le concepteur d'instruments de mesure. Les thèmes vont donc partir dans toutes les directions et ne seront pas connectés entre eux, « à bon entendeur salut ! ».

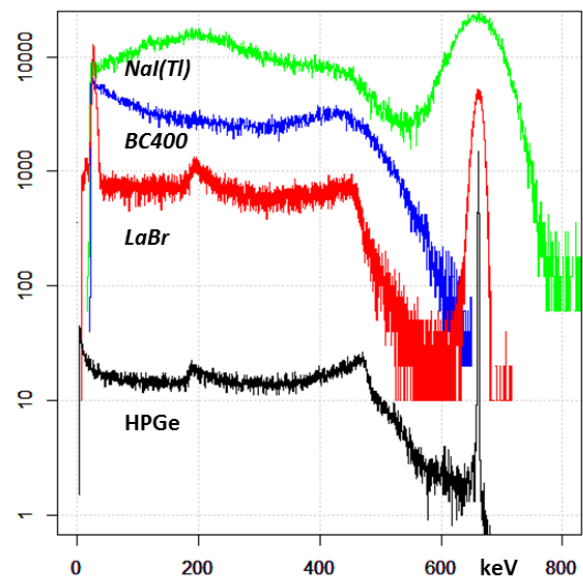
9.1 Un peu de spectroscopie appliquée

Nous avons beaucoup parlé de spectroscopie, puisque c'est en définitive le cœur de l'instrumentation. Il est grand temps de « voir » un spectre réel et ce qu'on peut en tirer... Nous commencerons par un exercice de spectroscopie comparée entre les scintillateurs et le germanium, puis nous aborderons quelques éléments relatifs à l'incertitude de mesure en spectroscopie de haute résolution avec les germanium hyper-purs.

9.1.1 Spectroscopie comparée

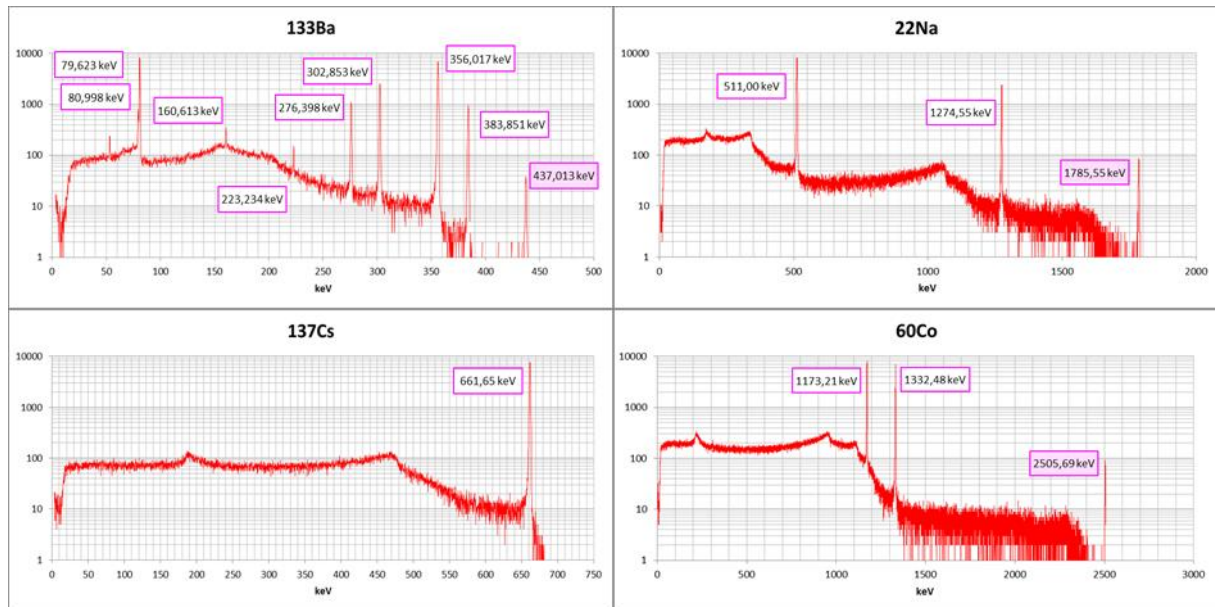
La figure suivante correspond à la spectroscopie d'une source de césium 137 réalisée avec quatre détecteurs différents : un scintillateur plastique (de type BC400), un scintillateur NaI(Tl), un scintillateur LaBr et un germanium hyper pur (HPGe). Les différentes courbes ont été décalées en ordonnées de façon à pouvoir les superposer.

Bien entendu, le scintillateur plastique ne présente pas de pic d'énergie totale à 662keV, mais simplement un plateau Compton relativement plat entre 0 et 470keV (l'énergie Compton maximale dans le cas présent). Les trois autres détecteurs ont des résolutions en énergie sensiblement différentes. Comme il fallait s'y attendre, le moins bon des trois est le NaI(Tl) avec une largeur de $38,05\text{keV}_{\text{RMS}}$ à 662keV, soit $13,5\%_{\text{FWHM}}$. Ce scintillateur est un peu vieux et a subi des dégâts d'irradiation qui ont singulièrement réduit ses performances. Le LaBr se comporte beaucoup mieux en affichant $7,72\text{keV}_{\text{RMS}}$, soit $2,7\%_{\text{FWHM}}$, ce qui est un chiffre excellent dans le milieu des scintillateurs inorganiques. Ces deux scintillateurs ont été acquis au moyen d'intégrateurs dont la durée a été ajustée à leur temps de décroissance. Le HPGe a été traité au moyen d'un amplificateur de spectroscopie de mise en forme trapézoïdale. Ses performances sont assez exceptionnelles avec $0,61\text{keV}_{\text{RMS}}$, soit $1,43\text{keV}_{\text{FWHM}}$ ou encore $0,21\%_{\text{FWHM}}$!

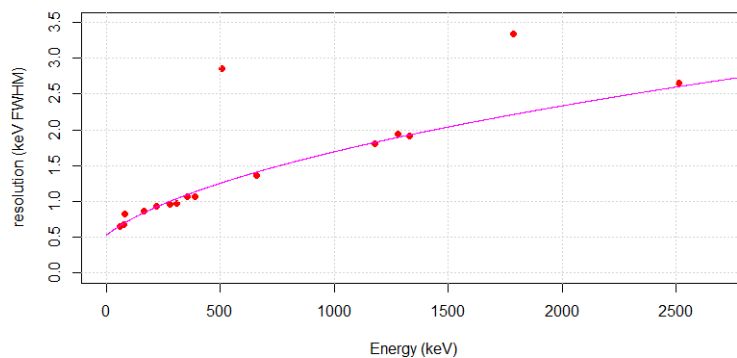


9.1.2 Spectroscopie de haute résolution au moyen de HPGe

Si on soumet notre détecteur HPGe à une collection de sources radioactives, on peut aisément obtenir les spectres suivants :



On peut, dès lors, mesurer la résolution en énergie sur chaque pic et tracer son évolution :



On remarque en premier lieu que deux points semblent s'éloigner de la tendance générale. Il s'agit des mesures à 511 keV et 1785 keV de la source de ^{22}Na (émetteur β^+). Le pic à 511 keV correspond à la mesure d'un des deux γ produit par la désintégration d'un positron dans la source elle-même. Lors de son annihilation, le positron n'est pas au repos. Par conséquent, les deux γ émis lors de cet événement voient leur énergie affectée de l'effet Doppler lié à la vitesse du positron lors de son annihilation. La mesure de la largeur de ces raies est un très bon moyen pour accéder à cette information et permet de remonter à cette vitesse. Le « pic somme », correspondant à la mesure du γ de 1274 keV et du γ de désintégration à 511 keV est bien entendu également affectée par l'effet Doppler.

Pour ce qui est des autres pics, leur largeur a deux origines distinctes. La première est le bruit électronique qui ne dépend que du réglage de la chaîne de spectroscopie. La seconde est liée aux fluctuations sur le nombre de quanta produits par chaque interaction. Elle est donc proportionnelle à la racine du nombre de

paires créées, donc à la racine de l'énergie mesurée. On constate bien, sur cette figure, que la majorité des incertitudes mesurées peut être ajustée au moyen d'une courbe unique en magenta :

$$\sigma_{FWHM} = \sqrt{0.531^2 + 2.60 \cdot 10^{-3} \cdot E}$$

On apprend ici que le bruit, d'origine électronique, de notre système (terme constant dans la formule) est de l'ordre de $225\text{eV}_{\text{RMS}}$. Comme il faut dépenser $\omega = 2,96\text{eV}$ dans le germanium pour produire une paire électron/trou, cela signifie que les fluctuations de mesure liées à l'électronique correspondent globalement à moins de 80 charges_{RMS}, ce qui reste quand même assez impressionnant.

Regardons ce qu'il se passe pour les γ de 1332keV du cobalt. Le nombre de quanta produits est de l'ordre de $N = 447 \cdot 10^3$. Si le processus de dépôt d'énergie était parfaitement aléatoire, ce nombre suivrait une distribution poissonnienne et les fluctuations seraient de l'ordre de $\sqrt{N} = 669$. Pour notre part, nous avons mesuré, avec la formule ci-dessus, une contribution hors électronique de $1,86\text{keV}_{\text{FWHM}}$, i.e. $791\text{eV}_{\text{RMS}}$, soit une incertitude de 266 charges_{RMS}, près de trois fois plus faible qu'attendu avec notre hypothèse naïve. Ce phénomène, expliqué en premier lieu par Fano, est en réalité lié au fait que les fluctuations statistiques ne suivent pas une distribution poissonnienne. Plusieurs processus sont en compétition et il faut garder à l'esprit que, dans le cas du germanium, la particule incidente doit perdre l'intégralité de son énergie dans le détecteur. En pratique, l'incertitude de mesure liée au dépôt d'énergie, ou plus précisément la variance, est toujours représentée par :

$$\sigma^2 = F \cdot N$$

Où F est le facteur de Fano (compris entre 0, pas de fluctuations et 1, fluctuations purement poissonniennes). Dans le cas présent, on trouverait par exemple $F = 0,16$, en bon accord avec les données de la littérature. La physique réserve parfois de bonnes surprises !

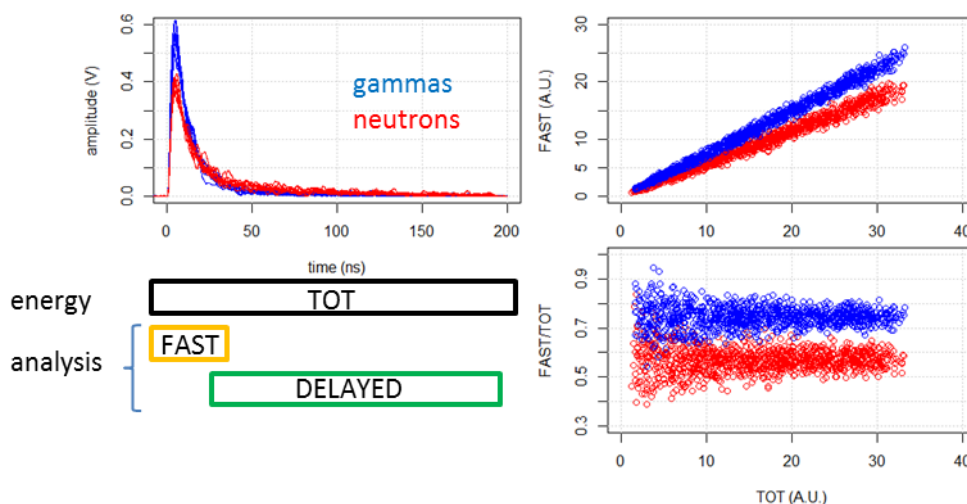
9.2 Discrimination n/ γ

9.2.1 Position du problème

La spectroscopie de neutrons par temps de vol est un sujet particulièrement intéressant, au regard des difficultés instrumentales qu'il génère. En effet, lorsqu'on dispose d'une source de neutrons, on a forcément, dans le même temps des γ qui seront mesurés par les détecteurs. Ceux-ci proviennent, ou bien de la source elle-même, et dans ce cas, on peut les discriminer des neutrons car leur temps de vol est connu (ils vont à la vitesse de la lumière !), ou bien de l'activation provoquée par les neutrons dans l'environnement. Dans ce cas, les γ sont décorélés en temps de l'émission des neutrons. Ils produisent donc un fond continu dans les spectres en temps de vol. Il devient alors délicat de dire si un événement détecté provient de l'interaction d'un neutron ou d'un γ . Fort heureusement, l'un des matériaux de choix pour la détection des neutrons est le scintillateur organique liquide. Celui-ci, outre le fait qu'il est fortement hydrogéné (donc favorise les collisions neutrons sur protons), présente aussi la particularité de produire des impulsions lumineuses qui n'ont pas la même forme pour les neutrons et les γ , à quantités de lumière produite égales. En utilisant des techniques simples d'analyse en forme d'impulsion, il sera donc possible de remonter à l'identité de la particule qui a heurté le détecteur.

Il existe différentes « écoles » pour la discrimination n/ γ . Elles utilisent généralement un couple de portes d'intégration parmi TOT, FAST, DELAYED, comme cela est illustré sur la figure ci-dessous à gauche (les signaux correspondent à un millier de photo-électrons, en rouge les n, en bleu les γ). Ensuite, suivant les habitudes, on représente en abscisses la porte d'énergie (la plus longue, typ. TOT) et en ordonnées, ou bien la

porte d'analyse ANALYSE (FAST ou DELAYED), ou bien le rapport de la porte d'analyse à la porte d'énergie (FAST/TOT par exemple) pour obtenir les distributions suivantes :



Nous pouvons dès lors définir un facteur de mérite qui est, par exemple, le rapport de l'écart entre n et γ ramené à la largeur des distributions respectives, à une énergie donnée :

$$FoM = \frac{\Delta}{\sigma_\gamma + \sigma_n}$$

On notera ici que le facteur de mérite a un sens très profond. Lorsqu'il vaut l'unité, les deux distributions se chevauchent et on commet des erreurs d'identification. Il faut atteindre des facteurs de mérite de 2 ou 3 pour raisonnablement conclure sur l'identité d'une particule... En pratique, il semble que la représentation ANALYSE/TOT vs. TOT donne des facteurs de mérite légèrement meilleurs que la représentation ANALYSE vs. TOT. Nous continuerons donc avec la première dans la suite.

Tout l'art du réglage consiste, à une énergie donnée, à maximiser le facteur de mérite, en jouant pour cela sur les débuts et fins de la porte d'analyse. Il n'y a pas de règle générale car, en définitive, les scintillateurs liquides ont une réponse qui varie lentement au cours du temps (dégradation du liquide, inclusion d'oxygène,...). On peut néanmoins définir quelques stratégies intéressantes pour obtenir les meilleurs résultats possibles. C'est ce que nous allons étudier à présent.

9.2.2 Optimisation de la porte d'analyse

L'optimisation de la fonction d'analyse peut se traiter comme un problème d'optimisation standard où il faut définir signal et bruit pour trouver le meilleur résultat. On applique exactement la même démarche que ce qui a été expérimenté à plusieurs reprises dans les chapitres précédents (voir en particulier le traitement des signaux de scintillation). La variable de mesure est le rapport de la porte d'analyse sur la porte totale.

On cherche un filtre, ou plus précisément un vecteur de coefficients h_i qui, multiplié par le signal, va nous donner un signal d'analyse qu'on normalise à la charge totale. Le résultat de ce filtrage vaut respectivement :

$$R_n = \frac{N \cdot \sum_{i=0..k} h_i \cdot n[i]}{N \cdot \sum_{i=0..k} n[i]} \quad R_\gamma = \frac{N \cdot \sum_{i=0..k} h_i \cdot \gamma[i]}{N \cdot \sum_{i=0..k} \gamma[i]}$$

Pour les neutrons et les gammas où $n[i]$ et $\gamma[i]$ sont les fonctions support des deux types de rayonnements. Elles se somment toutes les deux à 1.

L'incertitude sur la mesure, en supposant que la seule source d'incertitude est liée aux fluctuations du nombre de photo-électrons mesurés, est suivant que l'on a affaire à un neutron ou à un γ :

$$\sigma_n = \sqrt{N \cdot \sum_{i=0..k} \left(\frac{h_i \cdot N \cdot \sum_{i=0..k} n[i] - N \cdot \sum_{i=0..k} h_i \cdot n[i]}{(N \cdot \sum_{i=0..k} n[i])^2} \right)^2 \cdot n[i]}$$

$$\sigma_\gamma = \sqrt{N \cdot \sum_{i=0..k} \left(\frac{h_i \cdot N \cdot \sum_{i=0..k} \gamma[i] - N \cdot \sum_{i=0..k} h_i \cdot \gamma[i]}{(N \cdot \sum_{i=0..k} \gamma[i])^2} \right)^2 \cdot \gamma[i]}$$

On veut donc maximiser la fonction :

$$FoM = \frac{R_n - R_\gamma}{\sigma_n + \sigma_\gamma}$$

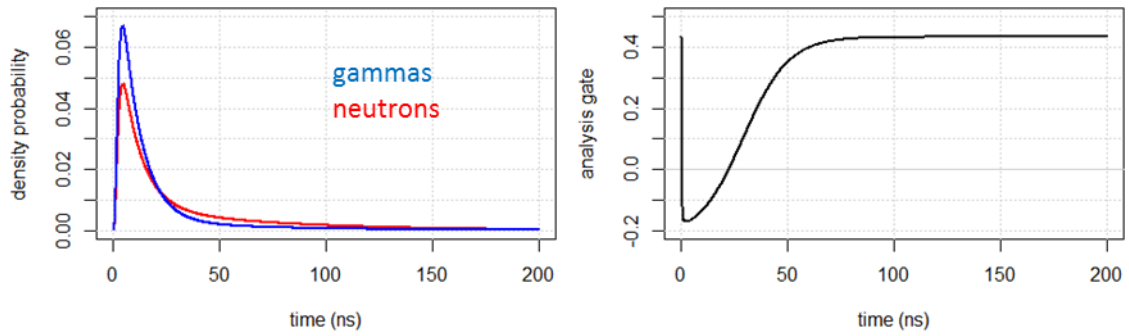
$$= \sqrt{N} \cdot \frac{\frac{\sum_{i=0..k} h_i \cdot n[i]}{\sum_{i=0..k} n[i]} - \frac{\sum_{i=0..k} h_i \cdot \gamma[i]}{\sum_{i=0..k} \gamma[i]}}{\sqrt{\sum_{i=0..k} \left(\frac{h_i \cdot \sum_{i=0..k} n[i] - \sum_{i=0..k} h_i \cdot n[i]}{(\sum_{i=0..k} n[i])^2} \right)^2 \cdot n[i]} + \sqrt{\sum_{i=0..k} \left(\frac{h_i \cdot \sum_{i=0..k} \gamma[i] - \sum_{i=0..k} h_i \cdot \gamma[i]}{(N \cdot \sum_{i=0..k} \gamma[i])^2} \right)^2 \cdot \gamma[i]}}$$

La technique habituelle ne donne pas de résultat fonctionnel. Pour ce problème particulier, il faut procéder numériquement avec son optimiseur favori et le laisser travailler à notre place.

En **R**, par exemple, si on disposait des signaux neut et gamm (qu'on veut discriminer), on écrirait

```
## function to be minimized (opposite of original FOM)
## signal is sampled every 0.1ns
FoM <- function (VA) {
  tn <- sum(neut)*0.1
  hn <- sum(VA * neut)*0.1
  tg <- sum(gamm)*0.1
  hg <- sum(VA * gamm)*0.1
  -abs (hn / tn - hg / tg) /
  (
    sqrt (sum(((VA*tn-hn)/tn^2)^2*neut)*0.1) +
    sqrt (sum(((VA*tg-hg)/tg^2)^2*gamm)*0.1)
  )
}
## starting point
V <- (neut-gamm)/(neut+gamm)
## minimization
V.spe <- nlm(FoM, V)
## result
plot (V.spe$estimate)
```

Donc, pour séparer au mieux les impulsions à gauche, il convient d'utiliser une porte d'analyse illustrée à droite :

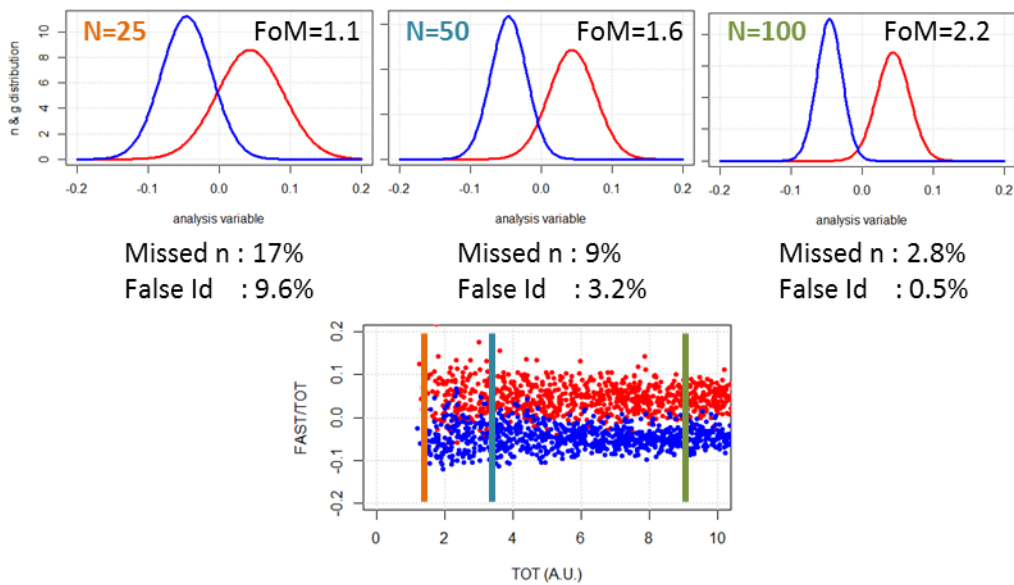


On remarquera, dans le morceau de code, qu'on est parti de la solution approchée :

$$h = \frac{n - \gamma}{n + \gamma}$$

Celle-ci est le résultat de l'optimisation d'un autre facteur de mérite $((R_n - R_\gamma) / \sqrt{\sigma_\gamma^2 + \sigma_n^2})$ dont l'avantage est de produire un résultat simple. En pratique, les deux méthodes sont extrêmement proches l'une de l'autre et c'était l'occasion d'illustrer l'usage de méthodes numériques en support du calcul manuel (ou, dans le cas présent, comme seule alternative).

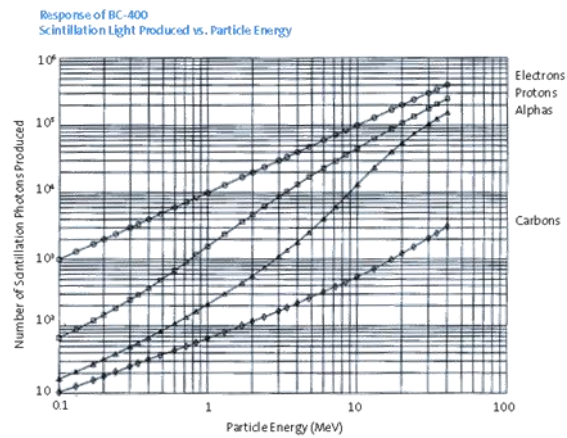
L'équation du facteur de mérite fait clairement ressortir une dépendance en racine du nombre de photoélectrons qui est assez naturelle. Si on s'intéresse uniquement à la seconde partie, celle-ci ne dépend que de la forme des signaux (pas de leur intensité). Dans le cas illustré ici, elle vaut $FoM \approx \sqrt{N} \cdot 0.22$ et les projections pour différentes intensités lumineuses sont illustrées sur la figure suivante :



On constate ici qu'on dispose d'un facteur de mérite raisonnable dès une petite centaine de photoélectrons mesurés. Cela correspond, dans de très bonnes conditions, à des dépôts d'énergie de l'ordre de 50keV en photons (100eV/photons, Qeff 20%).

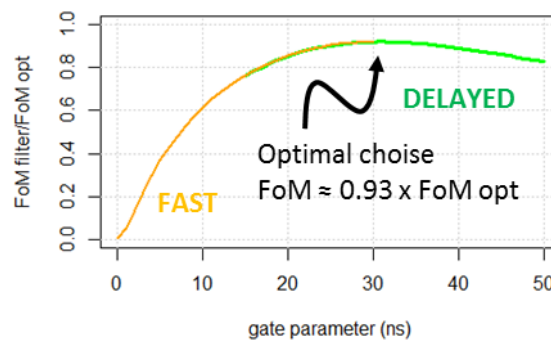
Les scintillateurs organiques sont généralement quenchés, c'est-à-dire que la quantité de lumière émise dépend du transfert d'énergie linéique de la particule incidente. Bicron a produit une étude, dont la principale figure est fournie ci-dessous, qui illustre le phénomène pour différentes particules incidentes. On constate, par exemple, que pour le BC400 (un scintillateur organique solide), les protons de basse énergie produisent

approximativement dix fois moins de lumière que les électrons. Donc, le seuil en énergie de détection d'un neutron est approximativement égal à 500keV.



9.2.3 Et avec une seule porte d'intégration ?

A présent que nous connaissons le filtre optimal, on peut aisément quantifier des techniques un peu moins exotiques (et surtout, plus faciles à réaliser...). Par exemple, en utilisant une simple porte d'intégration pour l'analyse de type FAST [-5ns ;ajustable] (i.e. $h_i=1$ sur la porte d'intégration, $h_i=0$ ailleurs) ou DELAYED [ajustable, 190ns], nous obtiendrions le facteur de mérite relatif (au filtre optimal) suivant :



On constate en premier lieu que choisir comme porte d'analyse FAST ou DELAYED est équivalent à l'optimum (c'est l'effet de la renormalisation de la variable d'analyse). L'optimum est en définitive assez large (on peut se tromper de +/- 5ns sans guère changer sensiblement la nature du résultat). En règle générale, il se situe plus loin que le point de croisement des impulsions respectives de n et γ . Le facteur de mérite relatif de cette solution, couramment utilisée n'est guère éloigné de l'optimum (0.93 pour les signaux de notre exemple), ce qui mérite une petite discussion. Rappelons-nous en effet que nous mesurons la distance entre deux distributions de photons. Si on considère que nous pourrions travailler correctement avec une centaine de photoélectrons sous le filtre optimal, cela signifie qu'il nous en faudrait 116 pour obtenir les mêmes performances avec une simple porte. On est donc à 16 photons près pour bien faire le travail. Nous avons déjà mis en garde dans ce cours, de l'effet des variations de ligne de base qui, lorsqu'elles atteignent quelques centaines de μV , induisent des erreurs de mesure de l'ordre de plusieurs photoélectrons. On est ici très près du problème concret. Dès que la porte d'intégration totale dépasse la centaine de ns, ce sont les fluctuations, même minimes, de ligne de base qui vont dégrader les performances de discrimination.

Dès lors, si l'on veut une bonne discrimination à faible énergie, il faut :

- Veiller à utiliser au maximum le gain du tube photomultiplicateur. Les éventuels problèmes de linéarité affectent essentiellement les impulsions de grandes amplitudes pour lesquelles la discrimination ne pose pas de difficulté. Attention néanmoins aux aspects relatifs à la mesure de temps (si on veut discriminer, c'est avant tout pour identifier, mais aussi pour mesurer une vitesse, in fine).
- Veiller au spectre de photon unique du tube photomultiplicateur. Cela n'a pas été mentionné ici, mais l'incertitude de mesure, donc le facteur de mérite, dépend bien entendu de ce paramètre, comme nous l'avons mentionné avant. Il faut donc un beau spectre de photon unique pour ne pas dégrader les performances en discrimination
- Veiller fondamentalement à la propreté de la ligne de base. C'est elle qui va avoir le plus d'incidence sur les performances à faibles flux lumineux, avant le réglage fin de la porte d'intégration.